

THÈSE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY - UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Denis LINGLIN

THÈSE. — DETERMINATION DE LA SECTION EFFICACE ELASTIQUE $K\pi$
PAR EXTRAPOLATION DE CHEW ET LOW

SOUTENUE LE 18 DECEMBRE 1969 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. A. BERTHELOT

Président

R. OMNES
L. LEPRINCE-RINGUET
F. MULLER

Examineurs

DETERMINATION DE LA SECTION EFFICACE ELASTIQUE $K\pi$

PAR EXTRAPOLATION DE CHEW ET LOW

D. LINGLIN

CERN



Copie de la Thèse présentée à la Faculté des Sciences d'Orsay,
Université de Paris, pour obtenir le grade de
Docteur ès Sciences

- 1969 -



CORRIGENDUM

Page 37 - ligne 10: lire la formule d'extrapolation (19)...
- ligne 12: lire Cela ne change...
- dernier paragraphe 2ème ligne: lire je me limiterai
au coefficient A₁ ou A₂.

$$\text{Page 38} - P_K \sim \frac{\partial^3 \sigma}{\partial M_{K\pi}^2 \partial M_{p\pi}^2 \partial \Delta^2} = \frac{I}{C} \dots$$

Page 97 - ligne 3: lire si je suppose que la seule onde
résonante

Page 124 - dernier paragraphe 2ème ligne: lire en général moins
significatifs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552216_0006

INTRODUCTION

C'est dans les produits d'interactions des mésons K avec les nucléons que l'on a découvert les résonances bosoniques étranges. Dans de telles expériences, dites de production, ces résonances se présentent comme des pics plus ou moins prononcés dans les distributions $K\pi$ ou $K\pi\pi$, et leurs nombres quantiques associés se déterminent à partir des distributions angulaires de leurs produits de désintégration.

Si ces méthodes expérimentales sont fort intéressantes dans la mesure où elles permettent d'établir l'existence et les paramètres des diverses résonances et d'étudier leurs mécanismes de production, elles n'apportent en fait que peu de renseignements du point de vue d'une description phénoménologique de l'interaction $K\pi$.

Une telle description implique la détermination des déphasages et des élasticités des différentes ondes partielles 0^+ , 1^- , 2^+ ... dans les deux états de spin isotopique, $1/2$ et $3/2$, constituant le système $K\pi$.

Par la méthode indirecte mentionnée ci-dessus, seules ont été décelées certaines parties résonantes de ces ondes, à savoir le $K^*(890)$, de spin parité 1^- , d'élasticité 1, et le $K^*(1400)$, de spin parité 2^+ , d'élasticité mal mesurée (environ $1/2$).

Par contre, rien ou presque n'est connu sur l'onde 0^+ de spin isotopique $1/2$, ni sur les différentes ondes $3/2$. Cette situation rappelle beaucoup celle qui existait il y a quelques années pour les

interactions $\pi\pi$, et dont la solution complète n'est pas encore trouvée actuellement.

Cependant, l'asymétrie observée pour le système $K\pi$, et qui ressemble, vers 1.1 GeV, à celle observée pour le système $\pi\pi$ au voisinage du ρ , incline à penser qu'il existe une onde 0^+ résonante vers 1.1 GeV, mais ceci ne constitue encore qu'une hypothèse. Il faudrait pourvoir effectuer une étude exhaustive et directe du système $K\pi$.

Seulement, une telle étude directe se heurte à une difficulté expérimentale pour l'instant insurmontable, résultant du fait qu'on ne peut utiliser ni le méson π , ni le méson K comme cible. Cette difficulté n'existe pas par exemple lorsque l'on veut étudier l'interaction π -proton.

Si techniquement une telle expérience n'est pas réalisable, Chew et Low ont formulé dès 1959 (Réf. 0-1) une méthode basée sur l'existence de pôles en certaines variables invariantes dans la matrice S et sur la possibilité de factorisation des résidus. Cette méthode permet d'obtenir des informations sur des processus tels que la diffusion $\pi\pi$ ou $K\pi$ à partir de réactions π -proton ou K -proton inélastiques, produisant un ou plusieurs π supplémentaires. Jusqu'à présent, la méthode de Chew et Low a été utilisée essentiellement pour l'étude de l'interaction $\pi\pi$ à partir des réactions à 3 corps :

$$(1) \quad \begin{aligned} \pi^{\pm} \text{ proton} &\rightarrow \pi^{\pm} \pi^0 \text{ proton} \\ \pi^{-} \text{ proton} &\rightarrow \pi^{+} \pi^{-} \text{ neutron.} \end{aligned}$$

Elle n'a donné en fait des résultats quantitatifs qu'assez récemment (Réf. 0-2 à 0-6).

En effet, qu'il s'agisse de l'interaction $\pi\pi$ ou $K\pi$, la méthode se heurte encore actuellement à des difficultés importantes.

Considérons par exemple les processus K^+_p à 3 corps :

(2) (a) $K^+_p\pi^0$ (b) $K^+_n\pi^+$ (c) $K^0_p\pi^+$ vers 5.0 GeV/c

1) La méthode de Chew et Low nécessite tout d'abord une statistique très importante dont ne dispose pas la collaboration CERN-Bruxelles dans laquelle je travaille, et dont ne disposent généralement pas les expériences habituelles de chambres à bulles.

2) A cette énergie, le problème de l'identification correcte des événements est très difficile car les particules se trouvent très souvent au minimum d'ionisation et sont de ce fait indiscernables. Les biais correspondants apparaissent notamment dans les corrélations (p_π, p_K) , qui déforment la distribution angulaire $K\pi$ de manière pratiquement impossible à corriger.

3) On pourrait bien sûr obtenir un échantillon très pur avec la réaction (2c) puisqu'il s'agit d'ajustements à 4 contraintes, donc peu ambigus, mais dans cette réaction, l'étude est compliquée par le fait que, à $M_{K\pi}$ fixée, il existe une corrélation très nette entre les variables $\cos \theta_{K^0K^+}$ (dans le système du centre de masse $K\pi$) et $M_{p\pi^+}$, cette dernière dépendant de la variable d'extrapolation Δ_{pp}^2 ; l'abondance du N^{*++} perturbe ainsi de manière essentielle la distribution angulaire $K\pi$ obtenue par extrapolation.

4) Les pertes d'événements aux petits transferts de moment Δ_{pp}^2 , c'est-à-dire correspondant aux protons courts, sont difficiles à corriger et introduisent des biais auxquels la méthode présente une extrême sensibilité. Ces événements à faibles Δ_{pp}^2 sont en effet les plus utiles pour l'extrapolation.

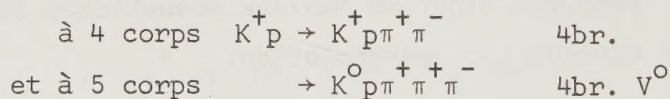
5) Les événements du type "1C fit" ont des masses effectives entachées d'une incertitude de l'ordre de 30 MeV, ce qui contribue à fausser complètement les résultats lorsque l'on veut effectuer une extrapolation dans un étroit intervalle de masse $K\pi$. Les événements du type "4C fit" ont également le même inconvénient, mais évidemment à un degré bien moindre.

6) Les réactions 2a et 2c sont dominées par l'échange de méson vectoriel, tout au moins dans la région du K^* . La diffusion élastique $K\pi$ devrait donc être extraite d'un lot d'événements où elle serait très minoritaire, ce qui est de toute évidence une situation peu favorable.

La difficulté No. 2 est résolue si l'on travaille par exemple vers $p_{K^+} = 1.2 \text{ GeV}/c$ car alors la réaction 2b) est éliminée et pour les événements à K^0 non vu, le critère d'ionisation permettrait de lever toutes les ambiguïtés entre 2a) et 2c).

Ceci améliorerait aussi la situation par rapport à 6), mais une nouvelle difficulté surgit, tout au moins dès que les masses ($K\pi$) sont assez grandes : à cette faible énergie, le transfert de moment minimum est élevé.

Un bien meilleur choix, résolvant les difficultés 2), 3), 4), 5) et 6) à la fois, consiste à utiliser les processus



Ce sont en effet des ajustements à 4 contraintes, comportant de ce fait peu d'ambiguïtés (difficulté 2). Le ou les π^+ n'ayant pas à choisir comme dans les 2 br. V^0 entre le proton (pour donner un N^{*++}) et le K , il n'existe que très peu de corrélation entre les variables $\cos \theta_{KK}$ et $M_{p\pi}$ (difficulté 3). Les 4 branches avec proton très court donnent des 3 branches que l'on pourrait confondre à la rigueur avec

des τ ($K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$) autre processus à 4 contraintes, donc peu ambigu; dans le cas des 4 br. V^0 aucun doute n'est permis. La difficulté(4) est donc bien réduite. Enfin, les quantités physiques que l'on peut calculer dans des ajustements à 4 contraintes ont des incertitudes très petites par rapport aux ajustements du type 1C (difficulté 5).

Bref, pour résoudre tous les problèmes, il suffit, en principe, de réunir des lots très importants d'événements. Le processus 4 corps fournit des lots plus de 5 fois plus nombreux que le processus 5 corps. Les problèmes sont apparus suffisamment nombreux dans le processus 4 corps d'autre part pour que finalement je m'arrête uniquement à ce canal; l'étude du processus 5 corps aurait permis cependant de préciser la diffusion inélastique $K\pi \rightarrow K\pi\pi$, dont on sait qu'elle est importante (environ 50 % de la diffusion totale) dans la région du K_{1400}^* . J'ai utilisé pour mon étude les 3 lots suivants, qui, sans être très élevés, n'en sont pas moins relativement importants.

$K^+ p \rightarrow K^+ p \pi^+ \pi^-$	$p = 5.0 \text{ GeV/c}$	6347 événements
	$p = 5.5 \text{ GeV/c}$	9489 événements
	$p = 9.0 \text{ GeV/c}$	2918 événements

Ces événements font partie de la DST de la collaboration mondiale sur les expériences de K^+ .

Le même canal, les mêmes événements permettent d'étudier à la fois les processus :

$$\begin{aligned} K^+ \pi^- &\rightarrow K^+ \pi^- \\ K^+ \pi^+ &\rightarrow K^+ \pi^+ \\ K^+ \pi^0 &\rightarrow K^+ \pi^+ \pi^- \end{aligned}$$

Il sera facile de voir, aux yeux de la théorie, que pour donner des résultats significatifs et raisonnablement complets allant jusqu'à une analyse en déphasage correcte, la méthode devrait porter sur un lot

d'au moins 30 000 événements; les 4 branches se prêtent bien à une mesure automatique par HPD ou LSD, il sera possible dans un proche avenir de disposer de tels lots.

Les lots ci-dessus, actuellement disponibles, vont me permettre un examen préliminaire des problèmes qui se posent au cours de cette étude. Ces problèmes sont du reste suffisamment nombreux pour que je me sois borné en fait à l'étude de la section efficace

$$K^+ \pi^- \rightarrow K^+ \pi^-$$

sans aller jusqu'à l'analyse en déphasage et l'étude des processus inélastiques $K^+ \pi^0 \rightarrow K^+ \pi^+ \pi^-$. Les programmes que j'ai dû mettre au point à cette occasion permettent cependant, avec peu de modifications, d'étudier tous les canaux possibles, compte non tenu des 6 difficultés énoncées plus haut et d'autres, propres à chaque canal.

Je vais exposer maintenant les fondements de la méthode de Chew et Low, ainsi que les développements mathématiques qui conduisent à une formulation applicable à l'étude de la diffusion $K\pi$ dans les 4 corps.

A. EXPOSE THEORIQUE *)

I. Aperçu de la Théorie

Tout ce qui va être dit plus loin de manière plus mathématique peut être exprimé dans le langage plus imagé du modèle d'échange de π (OPE).

La réaction $K^+ p \rightarrow K^+ p \pi^+ \pi^-$ est supposée, au moins partiellement, se dérouler selon le processus suivant :

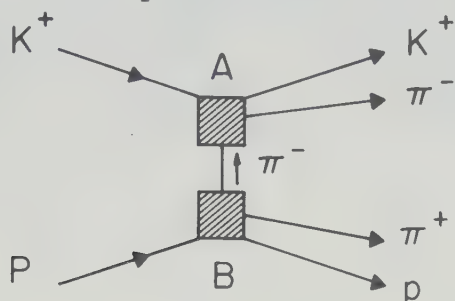


Fig. (A - 1)

Un π^- du nuage entourant le proton vient diffuser sur le K^+ suivant la réaction $K^+ \pi^- \rightarrow K^+ \pi^-$, tandis qu'un π^+ est émis par le même nuage pour conserver la charge. On dit qu'il y a échange d'un π et cela se traduira mathématiquement dans le formalisme par l'existence d'un pôle au point $\Delta^2 = \mu^2$. (La formulation mathématique demeurant identique, je peux dire aussi qu'au vertex du proton ce n'est pas un π^- qui est émis mais un π^+ venant du K^+ qui est absorbé et diffuse sur le proton suivant la réaction $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$). Finalement le processus global est interprété comme une double diffusion.

Le principe de factorisation dont nous parlerons ajoute simplement que ces deux diffusions :

$$\begin{aligned} K^+ \pi^- &\rightarrow K^+ \pi^- \\ p \pi^+ &\rightarrow p \pi^+ \end{aligned}$$

se déroulent de façon indépendante, autrement dit que les deux vertex A et B sont indépendants.

*) Ce chapitre s'inspire de l'exposé de la référence (A - 1).

II. Notations

a) Considérons donc la réaction à 4 corps $K^+p \rightarrow K^+p\pi^+\pi^-$ avec π échangé. J'utiliserai les notations du tableau suivant (A - 1) :

tableau A - 1

Particule	K^+	p	π échangé	K^+	p	π^+	π^-
Masse	m	M	μ	m	M	μ	μ
Quadriment	K	p	ℓ	K'	p'	q^+	q^-
énergie	e	E	ω	e'	E'	ω	ω
= moment	$\vec{K}$	$\vec{p}$	$\vec{\ell}$	$\vec{K}'$	$\vec{p}'$	$\vec{q}^+$	$\vec{q}^-$
Spin		s			s'		

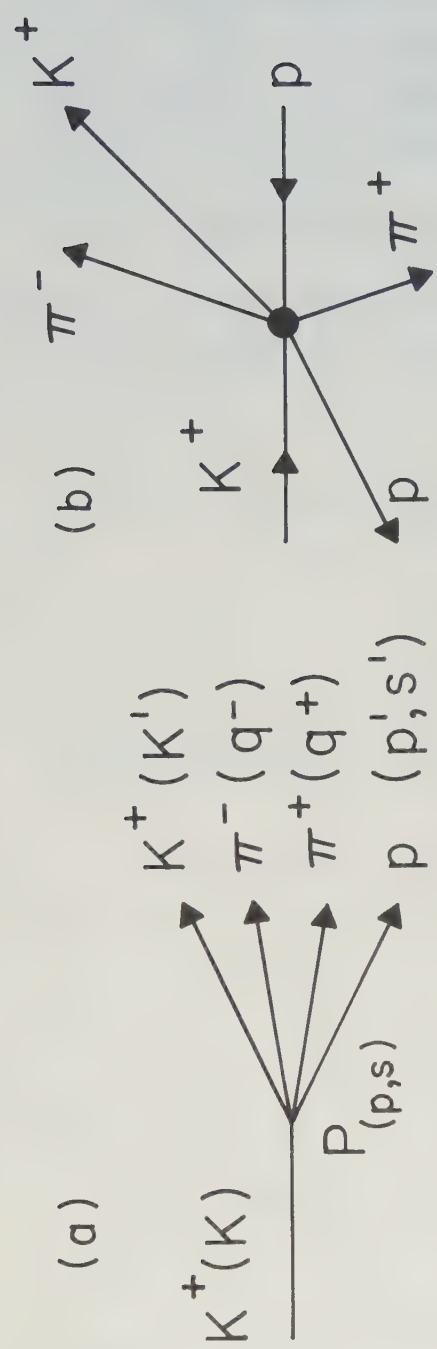
avec les conventions $\hbar = c = 1$

et les valeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 0.4938 \\ M = 0.9382 \\ \mu = 0.1396 \end{array} \right. \text{ GeV}$$

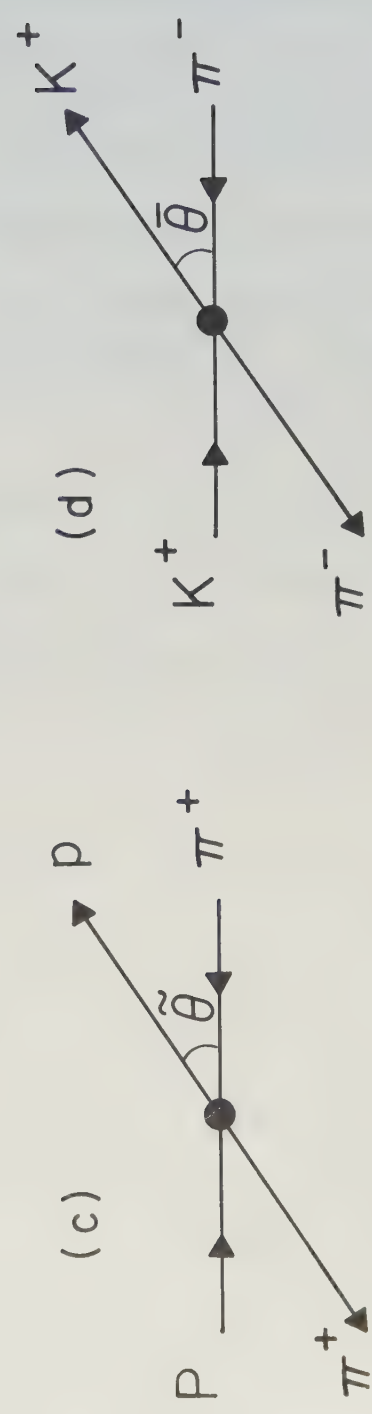
b) J'utiliserai la métrique (+ - - -). Les variables du type transfert de moment (Δ^2) sont alors négatives dans la région physique.

c) J'aurai besoin également, dans les calculs qui vont suivre, d'utiliser divers systèmes de référence, quatre exactement. Pour désigner les variables cinématiques par rapport à ces repères, j'utiliserai toujours les mêmes lettres mais je leur ajouterai simplement un signe

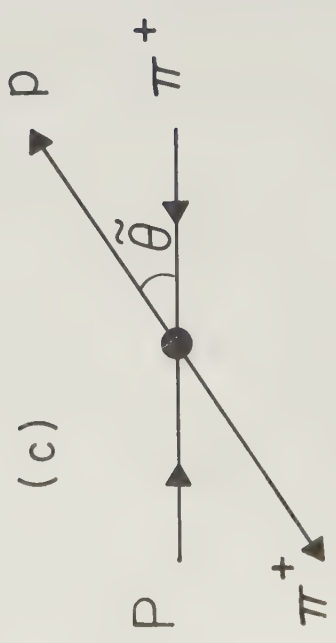


Système du laboratoire

Système du centre de masse



Système ($K^+ \pi^-$) au repos



Système ($p \pi^+$) au repos

fig. A-2

distinctif, selon la description ci-dessous :

- Système du laboratoire, pas de signe : $e, q^+ \dots$
- Système du centre de masse global, signe $*$: $\vec{p}^*, \omega^* \dots$
- Système du c.d.m. ($K^+ \pi^-$), signe $-$: $\vec{\omega}^+, \vec{p}^- \dots$
- Système du c.d.m. ($p \pi^+$), signe $\sim$: $\vec{K}, \vec{p} \dots$

La figure (A -2) visualise ces quatre systèmes de référence.

d) L'amplitude de la réaction considérée dépend d'un certain nombre de variables cinématiques, que l'on peut prendre, par exemple, parmi les variables ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \left[\begin{aligned}
 s &= (K+p)^2 = (e+E)^2 - (\vec{K}+\vec{p})^2 &= \text{carré de l'énergie totale du système} \\
 t &= (p-p')^2 = (E-E')^2 - (\vec{p}-\vec{p}')^2 &= \Delta_{p \rightarrow p}^2 \\
 t' &= (K-K')^2 = (e-e')^2 - (\vec{K}-\vec{K}')^2 &= \Delta_{K \rightarrow K}^2 \\
 u^2 &= (p'+q^+)^2 &= \text{carré de la masse effective} \\
 & &= M_{p\pi^+}^2 \\
 v^2 &= (K'+q^-)^2 &= M_{K^+\pi^-}^2 \\
 \Delta^2 &= (K-K'-q^-)^2 = (p-p'-q^+)^2 &= \Delta_{K^+ \rightarrow K^+\pi^-}^2 = \Delta_{p \rightarrow p\pi^+}^2 \\
 u_1^2 &= (p'+q^-)^2 &= M_{p\pi^-}^2 \\
 v_1^2 &= (K'+q^+)^2 &= M_{K^+\pi^+}^2 \\
 \Delta_1^2 &= (K-K'-q^+)^2 = (p-p'-q^-)^2 &= \Delta_{K^+ \rightarrow K^+\pi^+}^2 = \Delta_{p \rightarrow p\pi^-}^2
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

III. Expression générale de la section efficace 4-corps

Je vais maintenant donner une expression de σ_T , section efficace de la réaction $K^+p \rightarrow K^+p\pi^+\pi^-$; cette expression ne dépend absolument pas de la théorie de Chew et Low, mais je partirai de cette expression ensuite pour en déduire la formule d'extrapolation.

La matrice d'interaction T , la matrice S et l'amplitude R se relient ou se définissent par les relations :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2i\pi T_{fi} \quad (11)$$

$$\text{avec } T_{fi} = (2\pi)^3 \delta(K+p-K'-p'-q^+-q^-) R(I_8, s, s')$$

ou I_8 désigne un ensemble de 8 variables cinématiques indépendantes choisies par exemple dans (10), (en fait, la cible n'étant pas polarisée, il n'y en a que 7).

On peut intégrer l'amplitude sur les états de spin des protons :

$$|R(I_8)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |R(I_8, s, s')|^2.$$

Alors :

$$\sigma_T(s) = \frac{(2\pi)^4 M}{2K^* \sqrt{s}} \int dp' dK' dq^+ dq^- \delta(K+p-K'-p'-q^+-q^-) |R(I_8)|^2$$

dx désigne l'élément de volume invariant dans l'espace de phase à une particule.

Suivant l'usage, j'ai pris,

$$\text{pour les bosons } (K, \pi) : \quad dK' = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2e'} d^3 K'$$

$$\text{pour les fermions } (p) \quad dp' = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M}{E'} d^3 p'$$

Si $d\bar{\Omega}'_K$ désigne l'élément d'angle solide dans le système $(K^+ \pi^-)$
et si $d\tilde{\Omega}'_p$ désigne l'élément d'angle solide dans le système $(p\pi^+)$

je peux évaluer σ_T en effectuant sur l'intégrale un changement de variable :

$$\begin{aligned} \sigma_T(s) &= \frac{(2\pi)^4}{2 K^*} \frac{M}{\sqrt{s}} \frac{1}{(2\pi)^{12}} \frac{M}{8} \int \frac{d^3 p'}{E'} \int \frac{d^3 K'}{e'} \int \frac{d^3 q^+}{\omega^+} \int \frac{d^3 q^-}{\omega^-} \delta(K+p-K'-p'-q^+-q^-) \\ &\quad |R(I_8)|^2 \\ &= \frac{M^2}{16(2\pi)^8 K^*} \frac{\pi}{\sqrt{s} K^* \sqrt{s}} \int_{m+\mu}^{\sqrt{s}-(M+\mu)} dv \int_{M+\mu}^{u_{\max}(v)} du \int_{\Delta_{\min}^2(u,v)}^{\Delta_{\max}^2(u,v)} d\Delta^2 \\ &\quad \int d\tilde{\Omega}'_p \int d\bar{\Omega}'_K \tilde{q}_{p\pi} \bar{q}_{K\pi} |R(I_8)|^2 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\frac{\partial^3 \sigma_T}{\partial u \partial v \partial \Delta^2} = \frac{M^2 \tilde{q}_{p\pi} \bar{q}_{K\pi}}{32 (2\pi)^7 K^2 s} \iint d\tilde{\Omega}'_p d\bar{\Omega}'_K |R(I_8)|^2 \quad (12)$$

Je dois faire ici une remarque qui anticipe un peu sur la théorie : dans la formule ci-dessus, on peut supposer, comme Chew et Low, que le pion échangé est réel, c'est-à-dire sur sa couche de masse ("on-shell"), ou au contraire, comme le suggère le modèle périphérique d'échange de pion, que celui-ci est virtuel ("off-shell").

Selon le choix que l'on fait, $\tilde{q}_{p\pi}$, moment du π échangé dans le système $(p\pi^+)$, et $\bar{q}_{K\pi}$, moment du π échangé dans le système $(K^+\pi^-)$ ont des valeurs différentes; par exemple :

$$\bar{q}_{K\pi}^{\text{off}} \sim \sqrt{(\Delta^2 - (v-m)^2) (\Delta^2 - (v+m)^2)}, \quad \bar{q}_{K\pi}^{\text{on}} \sim \sqrt{(\mu^2 - (v-m)^2) (\mu^2 - (v+m)^2)}$$

On peut remarquer aussi que $\bar{q}_{K\pi}^{\text{on}}$ est le moment du K^+ ou du π^- final.

La discussion concernant la formulation à employer sera faite plus loin, au chapitre C-VIII. Je considérerai **jusque-là** dans mes formules que $\tilde{q}_{p\pi}$ et $\bar{q}_{K\pi}$ sont les moments "off-shell".

IV. Expression des sections efficaces de diffusion $(p\pi^+)$ et $(K^+\pi^-)$

Toujours indépendamment de la théorie de Chew et Low, je vais exprimer les sections efficaces des diffusions ci-dessus en fonction des amplitudes de réaction.

a) diffusion $K\pi$ J'utiliserai les invariants t' et v^2 précédemment définis ou au lieu de t' , $\cos \bar{\theta}_{KK} = 1 - t'/2v^2$.

Comme pour le processus global on a :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2i\pi T_{fi} \quad T \text{ matrice de transition}$$

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{fi} = 4(2\pi)^6 e^{-\omega} \delta(\vec{K} - \vec{K}') \delta(\vec{\ell} - \vec{q}^-) \\ T_{fi} = (2\pi)^3 \delta(K + \ell - K' - q^-) A(v \cos \bar{\theta}) \end{array} \right\} \quad (13)$$

La section efficace à l'énergie v s'écrit alors, en intégrant sur

les angles polaires $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ le carré de l'amplitude A

$$\begin{aligned}\sigma_{K\pi}(v) &= \frac{2\pi}{4Kv} \int (2\pi)^3 \delta(K+l-K'-q^-) |A(v, \cos \bar{\theta})|^2 dK' dq^- \\ \sigma_{K\pi}(v) &= \frac{1}{(8\pi v)^2} \int d\bar{\Omega}_{K'K} |A(v, \cos \bar{\theta})|^2\end{aligned}\quad (14)$$

b) diffusion $p\pi$. Je prends comme invariants caractérisant la diffusion, t et u^2 précédemment définis.

On a alors :

$$\begin{aligned}S_{fi} &= \delta_{fi} - 2i\pi T_{fi} \\ \text{avec } \left\{ \begin{aligned} \delta_{fi} &= 2(2\pi)^6 \frac{E}{M} \omega \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \delta(\vec{l} - \vec{q}^+) \\ T_{fi} &= (2\pi)^3 \delta(l+p-p'-q^+) B(u, t, s, s') \end{aligned} \right\} \quad (15)\end{aligned}$$

La section efficace à l'énergie $u = M_{p\pi}$ s'écrit alors en sommant sur les spins puis en intégrant sur les angles polaires $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$:

$$\begin{aligned}|B(u, t)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} |B(u, t, s, s')|^2 \\ \sigma_{\pi p}(u) &= \frac{2\pi M}{2\tilde{l}u} \int (2\pi)^3 \delta(l+p-p'-q^+) |B(u, t)|^2 dp' dq^+ \\ \sigma_{\pi p}(u) &= \left(\frac{M}{4\pi u} \right)^2 \int d\tilde{\Omega}_{p'p} |B(u, t)|^2\end{aligned}\quad (16)$$

V. Théorie de Chew et Low

Les deux fondements de la méthode d'extrapolation de Chew et Low sont :

- 1) L'existence de pôles dans les éléments de la matrice S de la réaction en certaines variables invariantes déterminées.
- 2) Le principe de factorisation des résidus.

Considérons l'exemple de la variable $\Delta^2 = \Delta_{K^+ \rightarrow K^+ \pi^-}^2 = (K - K' - q^-)^2$ moment de transfert du K^+ au système $(K^+ \pi^-)$, et soit I_7 un ensemble de 7 variables invariantes indépendantes formant avec Δ^2 un choix convenable pour I_8 . D'après le principe no. 1, l'amplitude $R(I_8, s, s')$ définie en (11) possède un pôle en la variable Δ^2 , situé au point $\Delta^2 = \mu^2$, car un échange de π est permis par la réaction. D'après le principe no. 2, le résidu de cette amplitude est exactement égal au produit des amplitudes $A(v, \cos \bar{\theta})$ et $B(u, t, s, s')$ définies en (13) et (15).

En d'autres termes il existe dans le plan complexe de la variable Δ^2 un certain cercle centré sur $\mu^2 \approx 0.020 \text{ GeV}^2$ dans lequel la série du développement de Laurent :

$$R(I_8, s, s') = \frac{A(v, \cos \bar{\theta}) \cdot B(u, t, s, s')}{(\Delta^2 - \mu^2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(I_7(\Delta^2)) \cdot (\Delta^2 - \mu^2)^n \quad (17)$$

converge uniformément.

En fait le développement de Born de l'amplitude R montre qu'il existe une infinité de pôles commençant au point $\Delta^2 = 4\mu^2$: $4\mu^2$, $4\mu^2 + \mu^4/s$, $9\mu^2$... , ceci en admettant que le potentiel nucléaire peut être décrit par un seul potentiel de Yukawa. Il est

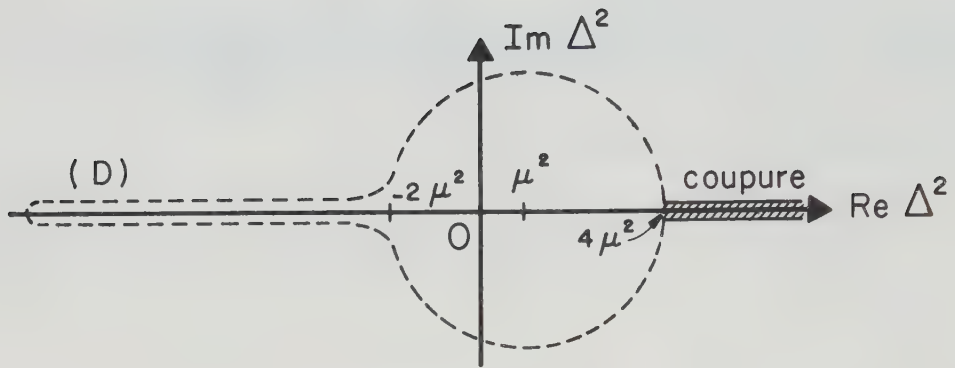


fig. A - 3

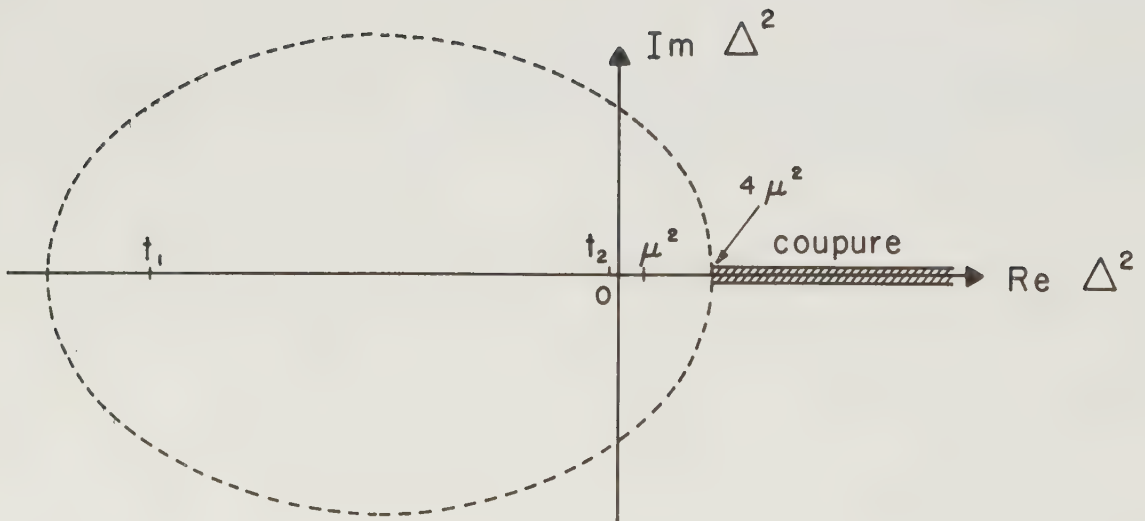


fig. A - 4

plus réaliste de penser que le potentiel réel est une superposition continue de tels potentiels : à partir de $\Delta^2 = 4\mu^2$ chaque segment de l'axe réel possède une infinité de pôles, c'est ce qu'on appelle une coupure.

Notons que dans cette coupure, puisqu'entre les 2 vertex A et B l'on peut échanger les nombres quantiques du ρ , par exemple, il existe un pôle en $\Delta^2 = m_\rho^2$, mais ce pôle, comme toute la coupure, n'intervient que dans les termes α_n du développement et pas dans le résidu si

$$|\Delta^2 - \mu^2| \leq 3\mu^2$$

c'est-à-dire si le cercle de convergence ne traverse pas la coupure.

Ce cercle est un domaine minimum de convergence. Intuitivement, rien n'empêche de déformer ce cercle vers des Δ^2 négatifs jusqu'à $20\mu^2$ ou plus loin, comme le montre la figure (A-3) puisque le domaine considéré ne contient évidemment ni pôle ni coupure.

Plus mathématiquement, l'expression $T = R(I_{g,s,s'}) - \frac{A \cdot B}{(\Delta^2 - \mu^2)}$ est analytique dans tout le domaine physique $t_1 < \Delta^2 < t_2$. Alors (Ref. A-2), le développement de T en série de polynômes de Jacobi (les polynômes de Legendre en sont un cas particulier) en $(\Delta^2 - \frac{t_1+t_2}{2})$ est convergent à l'intérieur de la plus grande ellipse de foyers t_1 et t_2 où T est régulière, c'est-à-dire celle dont un sommet passe par le bord de la coupure $\Delta^2 = 4\mu^2$ (figure A-4).

Ici j'ai effectué un développement de Taylor en $(\Delta^2 - \mu^2)$ sur T ; mais puisque dans le traitement statistique on doit se borner à un nombre très limité de termes, c'est-à-dire supposer que le développement est rapidement convergent, alors les ajustements donneront les mêmes résultats, quel que soit le type du développement.

On peut donc en conclure raisonnablement que le développement (17) est convergent dans tout le domaine physique.

Simplement, suivant les limites considérées, j'aurai à utiliser plus ou moins de termes pour reproduire correctement l'amplitude. Pratiquement, cela revient à regarder à partir de quel degré du développement les résultats ne varient plus.

Ceci étant admis, j'insiste sur le fait que la propriété exprimée par (17) est strictement locale ; il ne s'agit pas d'une certaine contribution partielle à l'amplitude R , à laquelle il faudrait ajouter des termes complémentaires, mais bien d'une représentation locale de l'amplitude exacte.

L'amplitude $R(I_8)$ possède bien sur d'autres représentations analogues à (17), avec les variables $\Delta_1^2 = \Delta_{K^+ \rightarrow K^+ \pi}^2$ ou $t = \Delta_{pp}^2$ par exemple. Les résidus des développements de Laurent correspondants sont alors reliés à d'autres diffusions que celles qui nous intéressent ici.

Il faut noter également que les représentations définies ci-dessus ne font intervenir par définition que les amplitudes purement nucléaires et qu'aucun effet coulombien n'est à considérer pour l'ensemble de la réaction.

VI. Formule d'extrapolation

Cette formule s'obtient très facilement en combinant les relations (12), (14), (16) et (17), que je rappelle ici :

$$\frac{\partial^3 \sigma_T(s)}{\partial u \partial v \partial \Delta^2} = \frac{M^2 \tilde{q}_{p\pi} \bar{q}_{K\pi}}{32(2\pi)^7 K^2 s} \iint d\tilde{\Omega}_{p'p} d\bar{\Omega}_{K'K} |R(I_8)|^2 \quad (12)$$

$$\sigma_{K\pi}(v) = \frac{1}{(8\pi v)^2} \int d\bar{\Omega}_{K'K} |A(v, \cos \theta)|^2 \quad (14)$$

$$\sigma_{p\pi}(u) = \frac{M}{(4\pi u)^2} \int d\tilde{\Omega}_{p'p} |B(u, t)|^2 \quad (16)$$

$$R(I_{8,s,s'}) = \frac{A(v, \cos \bar{\theta}) B(u, t, s, s')}{(\Delta^2 - \mu^2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(I_7(\Delta^2)) (\Delta^2 - \mu^2)^n \quad (17)$$

En effet de (17) je déduis :

$$\begin{aligned} |R(I_8)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |R(I_{8,s,s'})|^2 = \frac{|A(v, \cos \bar{\theta})|^2 \frac{1}{2} \sum |B(u, t, s, s')|^2}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (\Delta^2 - \mu^2)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} \left[|A(v, \cos \bar{\theta})|^2 |B(u, t)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (\Delta^2 - \mu^2)^n \right] \end{aligned}$$

je reporte cette expression de $|R(I_8)|^2$ dans (12), j'obtiens :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \sigma_T(s)}{\partial u \partial v \partial \Delta^2} &= \frac{M^2 \tilde{q}_{p\pi} \bar{q}_{K\pi}}{32(2\pi)^7 K^2 s (\Delta^2 - \mu^2)^2} \iint d\tilde{\Omega}_{p'p} d\bar{\Omega}_{K'K} \left(|A|^2 \cdot |B|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (\Delta^2 - \mu^2)^n \right) \end{aligned}$$

et d'après (14) et (16) :

$$\frac{\partial^3 \sigma_T(s)}{\partial u \partial v \partial \Delta^2} = \frac{M^2 \tilde{q}_{p\pi} \bar{q}_{K\pi} (8\pi v)^2 (4\pi u)^2}{32(2\pi)^7 K^2 s (\Delta^2 - \mu^2)^2 M^2} \left(\sigma_{K\pi}(v) \sigma_{p\pi}(u) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\Delta^2 - \mu^2)^n \right) \quad (18)$$

$$\text{où } A_n = \iint d\tilde{\Omega}_p' d\bar{\Omega}_K' \beta_n.$$

Finalement, en utilisant :

$$\partial u^2 = 2u \partial v$$

$$\partial v^2 = 2v \partial v$$

$$\tilde{q}_{p\pi} \bar{q}_{K\pi} = \frac{\Phi(\Delta^2, u, v)}{4u \cdot v}$$

$$\text{avec } \Phi = \sqrt{(\Delta^2 - (u-m)^2)(\Delta^2 - (u+m)^2)(\Delta^2 - (v-M)^2)(\Delta^2 - (v+M)^2)}$$

et en remarquant que si je veux exprimer les variables cinématiques en GeV, GeV/c ou GeV/c² et les sections efficaces en millibarns je dois multiplier le premier membre de (18) par le facteur 0.389 j'obtiens la formule d'extrapolation ;

$$24.92 \pi^3 K^2 s \frac{(\Delta^2 - \mu^2)^2}{\Phi(\Delta^2, u, v)} \frac{\partial^3 \sigma}{\partial u^2 \partial v^2 \partial \Delta^2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\Delta^2 - \mu^2)^n \quad (19)$$

avec : $A_0 = \sigma_{K\pi}(u) \sigma_{p\pi}(v)$

Cette formule, que je vais utiliser dans toute la suite, va me permettre de déterminer la section efficace élastique de la diffusion $K^+\pi^- \rightarrow K^+\pi^-$ à partir des événements réels à 4 branches, connaissant la section efficace élastique de la diffusion $p\pi^+ \rightarrow p\pi^+$.

Ce n'est plus alors qu'un problème de traitement statistique de mes données.

VII. Restrictions pratiques sur les événements réels

En théorie, je peux prendre tous les événements réels satisfaisant à $|\Delta^2| < 20\mu^2$, par exemple, pour effectuer l'extrapolation.

Les événements ne se produisant pas par échange de π (le fonds) ne doivent contribuer théoriquement qu'aux termes ultérieurs du développement et pas au résidu. On dit que les vicissitudes du domaine physique disparaissent au pôle.

Dans la pratique il est préférable d'agir légèrement autrement. On a en effet effectué une modification importante au modèle en supposant que le pion échangé était virtuel. De plus, les coefficients A_i ($i \geq 1$) dépendent théoriquement des 2 variables u et v ; mais pour des raisons de statistique, il sera nécessaire de supposer que cette dépendance est faible. Enfin, dans les ajustements que je vais effectuer ultérieurement pour déterminer $\sigma_{K\pi}(v)$, je vais me limiter à un nombre très restreint de termes du développement. Toutes ces raisons peuvent faire que, pratiquement, le fonds influe sur le résidu au pôle.

Je vais donc faire quelques coupures qui éliminent facilement une grande partie des événements ne se produisant pas par échange d'un π .

Or on sait que le processus $K^+ p \rightarrow K_{890}^* N_{1236}^{*++}$ se produit avec échange de π (Référence A-3).

Je vais alors me restreindre à la bande du N^{*++} en espérant que c'est cette résonance qui détermine surtout cet échange et que dans tout un domaine autour du K_{890}^* ce processus soit largement dominant.

Ce faisant, je conserve la majorité de mes événements car le N^* est très abondamment produit et pour les hautes masses ($K^+ \pi^-$) la statistique est faible.

En dehors de cette raison de statistique, rien n'empêche de prendre toute la bande ($K\pi$), y compris la région du 1400 puisque $K^+ p \rightarrow K_{1400}^* N^*$ se produit également essentiellement par échange de π (Réf. A-4); et ceci serait le meilleur moyen d'obtenir l'élasticité du K_{1400}^* , en comparant la section efficace $K\pi$ obtenue à la limite d'unitarité pour une onde D.

Dans tout ce qui va suivre je ne considérerai que les événements satisfaisant aux 3 coupures suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_{K^+ \rightarrow K^+ \pi^-}^2 &> -20\mu^2 \\ 1.14 &< M_{p\pi^+} < 1.36 \\ \text{seuil} &< M_{K^+ \pi^-} < 1.35 \end{aligned}$$

Plus tard, après les premiers résultats, je restreindrai la coupure en Δ^2 .

B. LES METHODES STATISTIQUES D'ANALYSE

I. Introduction

A première vue, la formule (19) peut paraître un peu hermétique et avant de parler de traitement statistique, je vais essayer d'en visualiser la signification :

$$C = 24.92 \pi^3 K^2 s$$

est une constante pour tous les événements d'une expérience,

$$\frac{\partial^3 \sigma}{\partial M_{K\pi}^2 \partial M_{P\pi}^2 \partial \Delta^2}$$

est une section efficace différentielle, c'est-à-dire une quantité proportionnelle à la densité d'événements dN/dv autour du point $M_{K\pi}^2$, $M_{P\pi}^2$, Δ^2 considéré; $dv = dM_{K\pi}^2 dM_{P\pi}^2 d\Delta^2$.

Bref, à une constante multiplicative près, la formule (19) dit simplement qu'à $(M_{K\pi}^2, M_{P\pi}^2)$ donnés, le nombre $N(\Delta^2)$ d'événements, c'est-à-dire la distribution de Δ^2 , peut s'écrire sous la forme :

$$N(\Delta^2) \sim \frac{\Phi(\Delta^2, M_{\mu\pi}, M_{P\pi})}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} (A_0 + A_1 (\Delta^2 - \mu^2) + \dots).$$

En limitant la série entière au nombre minimum de termes, le problème statistique consiste à trouver la valeur la plus probable de A_0 , A_1 ... en chaque point $(M_{K\pi}^2, M_{P\pi}^2)$ pour en déduire $\sigma_{K\pi}$ par la relation :

$$\sigma_{K\pi} = \frac{A_0}{\sigma_{P\pi}}$$

Ceci revient à dire que A_0 , A_1 ... sont des variables aléatoires : aucune valeur à priori ne leur est imposée. Ceci

constitue l'extrapolation de Chew et Low proprement dite. Certains modèles (Dürr - Pilkuhn (Ref. B1), Vénéziano) appliqués par différents auteurs (Ref. B2 et B3) à la diffusion $K\pi$ donnent une forme à priori à la fonction $f = A_0 + A_1 (\Delta^2 - \mu^2) + \dots$, forme dépendant d'un nombre plus petit de paramètres. J'emploie ici la méthode originelle de Chew et Low, la plus couteuse en événements, mais la moins sujette à caution.

Essentiellement, il y a deux méthodes générales pour déterminer ces paramètres inconnus : celle du minimum de χ^2 et celle du maximum de vraisemblance.

La deuxième méthode, beaucoup plus souple d'emploi et la meilleure ici, va me permettre un traitement exhaustif des données c'est-à-dire d'obtenir directement la courbe $\sigma_{K\pi}$ sans aucun résultat intermédiaire qui fasse perdre de l'information.

Je vais maintenant étudier plus en détail ces deux méthodes, avec les trois paramétrisations différentes que j'ai utilisées avec la méthode du maximum de vraisemblance. Les résultats proprement dits feront l'objet du prochain chapitre, je m'attache ici uniquement aux méthodes de traitement et de calculs.

II. Méthode du χ^2

Je ne discuterai pas ici la théorie de cette méthode bien connue, mais uniquement son application pratique à mon cas particulier.

La méthode du χ^2 présente l'avantage de visualiser très bien l'obtention du résultat mais est d'un maniement difficile ici; elle ne permet en outre qu'un mauvais traitement statistique. Seulement, cette méthode est la seule qui soit pratiquement accessible aux petits ordinateurs et c'est pour cette raison que les physiciens de ma collaboration l'ont utilisée jusqu'à présent; les résultats obtenus ont déjà fait l'objet d'une publication (Ref. B4).

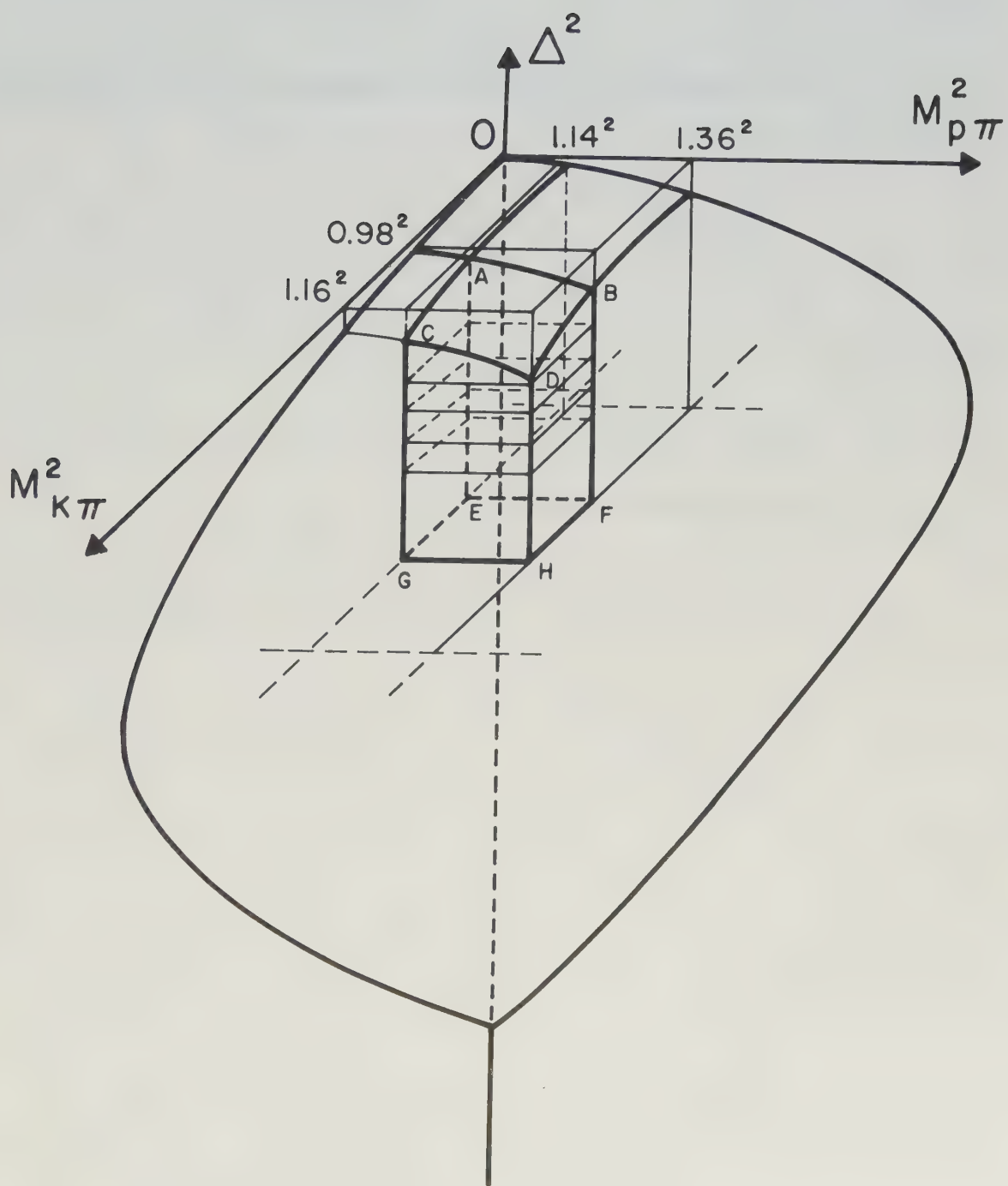


fig. B-1

La procédure consiste à diviser la partie utilisée du diagramme de Chew et Low en un maximum de boites dans l'espace $(M_{K\pi}^2, M_{p\pi}^2, \Delta^2)$, mais de telle sorte que le nombre d'événements par boite soit "suffisant", c'est-à-dire au moins de l'ordre de 20 à 30 (voir figure B-1).

Pour chacune de ces boites, on détermine la valeur moyenne de l'expression :

$$F_i = C \cdot \frac{(\Delta^2 - \mu^2)^2}{\Phi(\Delta^2, M_{K\pi}^2, M_{p\pi}^2)} \cdot \frac{\partial^3 \sigma}{\partial M_{K\pi}^2 \partial M_{p\pi}^2 \partial \Delta^2} = C \cdot \frac{(\Delta^2 - \mu^2)^2}{\Phi} \cdot \text{SIG} \cdot N$$

sur l'ensemble des événements de la boite.

- SIG = nombre d'événements par millibarn pour la réaction $K^+ p \pi^+ \pi^-$
- N = nombre d'événements de la boite

Les incertitudes dF_i prises pour ces valeurs moyennes F_i sont les incertitudes statistiques, ou plus exactement, on ne considère que celles-ci.

On considère ensuite, à $(M_{p\pi}^2, M_{K\pi}^2)$ constants, l'ensemble $(F_i \pm dF_i)$ sur une famille de boites correspondant à des Δ^2 variables.

Par méthode de χ^2 , on ajuste enfin dans le plan (Δ^2, F) un polynôme en $(\Delta^2 - \mu^2)$ sur cet ensemble.

De la valeur de A_0 ainsi déterminée, on déduit la valeur moyenne de $\sigma_{K\pi}$ sur l'intervalle de $M_{K\pi}^2$ considéré, connaissant la valeur moyenne de $\sigma_{p\pi}$ sur l'intervalle de $M_{p\pi}^2$ considéré.

Graphiquement, si l'on ajuste par exemple à une droite, on obtient des résultats analogues à ceux de la figure B-2. A_0 y apparaît comme l'ordonnée de la droite ajustée au point d'abscisse $\Delta^2 = \mu^2$ non

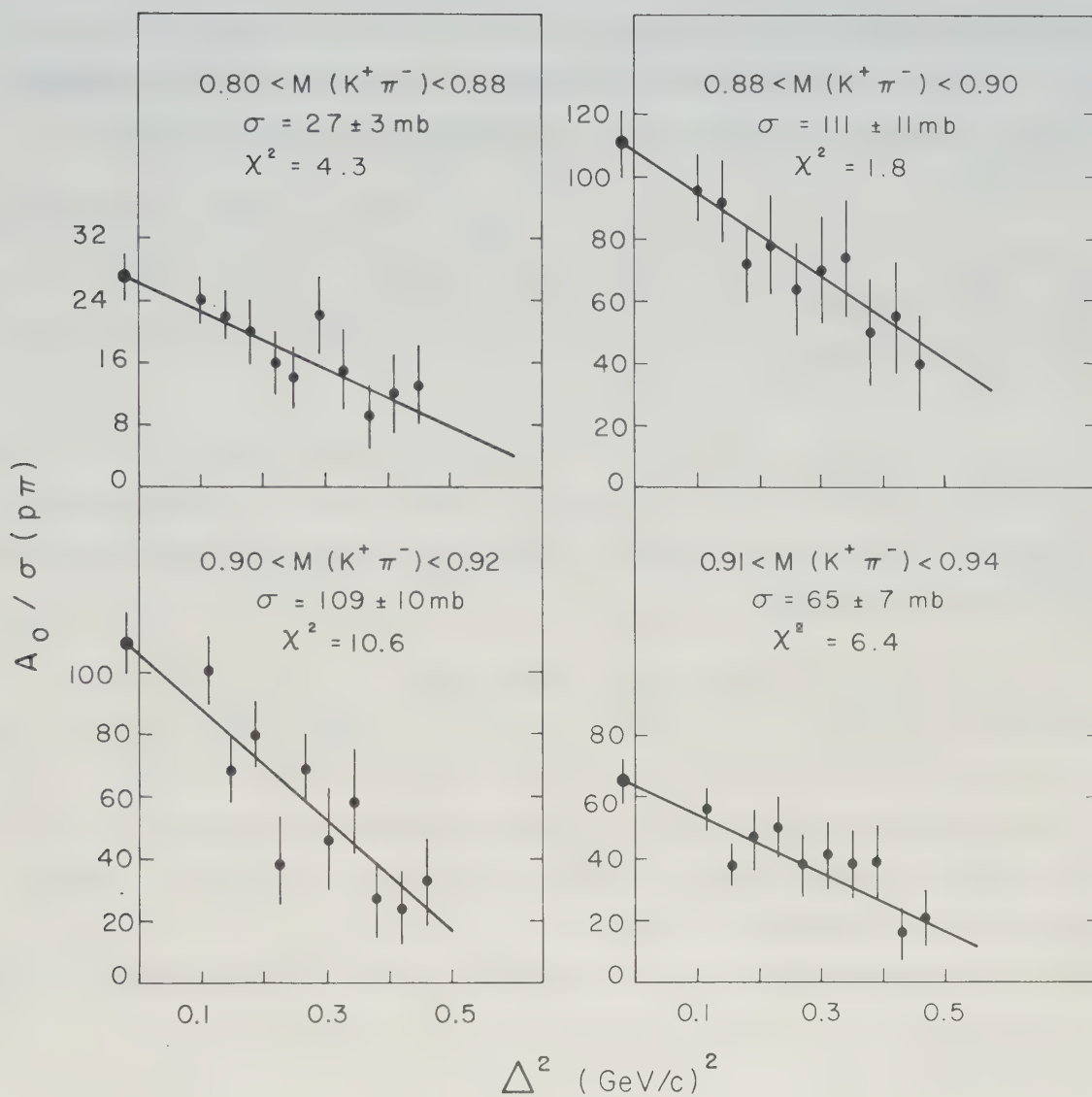


fig. B-2

physique. C'est cette extrapolation de la droite ajustée dans le domaine physique jusqu'au point non physique $\Delta^2 = \mu^2$ qui donne son nom à la méthode. Celle-ci suppose que la fonction $F(\Delta^2)$ se comporte de manière identique dans la région physique (observable) et dans la région non physique (inobservable).

Dimensions des boîtes

Pour simplifier les programmes, on a utilisé pour toutes les boîtes d'un même ajustement des parallélépipèdes rectangles égaux.

1) Pour $M_{p\pi}^2$, la bande du N^* 1.14 - 1.36 GeV a été considérée comme suffisamment étroite et utilisée sans subdivision. Cela revient à dire que $\sigma_{p\pi}$ a été considérée comme constante dans la région du N^* , ce qui constitue une assez mauvaise approximation.

2) Pour $M_{K\pi}^2$, on a divisé l'intervalle étudié seuil - 1.35 GeV en un certain nombre de parties (disons 13 pour fixer les idées), se recoupant éventuellement, afin d'avoir pour chaque ajustement un nombre suffisant d'événements.

3) Pour Δ^2 se pose un petit problème : à $M_{K\pi}$ et $M_{p\pi}$ donnés, il existe un Δ^2 minimum en valeur absolue pour le moment de transfert, comme le montre la figure (B-1). Pour ne pas compliquer les programmes avec des poids difficiles à calculer, on a jugé préférable que toutes les boîtes d'un même ajustement aient les mêmes dimensions. Aussi a-t-on utilisé seulement les événements de $|\Delta^2| > |\Delta_{\min}^2|$ où $|\Delta_{\min}^2|$ est le plus grand des transferts minimum sur le rectangle ($M_{K\pi}^2$ $M_{p\pi}^2$) considéré, c'est-à-dire en pratique, celui du point correspondant aux bornes supérieures des deux intervalles de masse.

Cette coupure simplifie les programmes mais a bien sûr le grand désavantage de supprimer les événements ayant les plus faibles $|\Delta^2|$, c'est-à-dire les plus intéressants pour l'extrapolation.

A partir de ce $|\Delta_{\min}^2|$ on a divisé les événements en boîtes de

$2\mu^2$ de hauteur jusqu'à un maximum de 10 boîtes, en s'arrêtant à la première boîte atteignant ou dépassant $20\mu^2$.

La Section efficace $\sigma_{K\pi}$ est alors déterminée de la manière décrite plus haut. Les erreurs sont données directement par la méthode des moindres carrés à partir des dF_i . Ceci revient à dire que les seules erreurs considérées sont les erreurs externes, ou erreurs statistiques.

Les valeurs du χ^2 par degré de liberté donnent finalement une idée de la qualité des ajustements.

Le nombre de ceux-ci est le nombre d'intervalles de $M_{K\pi}$.
Résumons, pour conclure les avantages et les inconvénients de cette méthode.

Avantages

- 1) Les programmes sont faciles à écrire, donc permettent d'obtenir des résultats préliminaires en un temps relativement court.
- 2) Les programmes demandent peu de calculs, donc sont accessibles aux petits ordinateurs type IBM 1800, UNIVAC 418 ou CDC 3100.
- 3) Les calculs ont une interprétation graphique simple et immédiate qui permet de bien visualiser l'extrapolation effectuée.

Inconvénients

- 1) Bien que cela soit réalisable moyennant le calcul supplémentaire du volume bordé par la surface $\Delta_{\min}^2 (M_{K\pi}^2, M_{p\pi}^2)$ et l'introduction de poids proportionnels aux volumes des boîtes, la méthode ne tient pas compte d'un certain pourcentage des événements (30 à 35 % environ) qui sont les plus significatifs.

2) La faible statistique imposant de ne pas subdiviser la bande du N^{*++} , on assimile $\sigma_{p\pi}$ à une constante sur cet intervalle, ce qui n'améliore pas les résultats.

3) L'ajustement a lieu en 2 étapes, et finalement les quantités dont on minimise la somme des carrés sont déjà des moyennes sur un certain nombre d'événements. Le traitement statistique crée donc une perte évidente d'information. On dit que le traitement n'est pas exhaustif.

4) Pour des raisons de nombre d'événements toujours, on est obligé d'opérer sur des intervalles de $M_{K\pi}$ relativement larges. Ajuster des constantes sur ces intervalles est une approximation d'autant plus grossière que les quantités ajustées varient beaucoup dans cette région, et de façon non linéaire.

5) Les expériences de physique étant ce qu'elles sont, les quantités $M_{p\pi}^2$, $M_{K\pi}^2$, Δ^2 sont entachées d'une certaine incertitude, faible puisqu'il s'agit d'ajustements à 4 contraintes, mais qui existe tout de même. Par exemple, pour $M_{K\pi}$, elle peut être de l'ordre de grandeur des intervalles d'ajustement ($\Delta M_{K\pi} \approx 7 \text{ MeV}$ à $P_{K^+} = 5.0 \text{ GeV/c}$). Cette incertitude peut être considérée en première approximation comme gaussienne. Par conséquent, le nombre d'événements par boîte n'est statistiquement correct que lorsque la densité d'événements, au voisinage des bords de la boîte, varie linéairement par rapport à l'une quelconque des variables. Cette condition étant rarement réalisée, les nombres d'événements par boîte sont presque toujours faux. Il y a donc là un nouveau biais et une sous-estimation des erreurs. Ce phénomène est bien connu puisqu'il contribue à élargir les distributions de Breit-Wigner représentant les résonances.

Idéalement, il faudrait remplacer chaque événement réel, considéré comme un point dans l'espace ($M_{p\pi}$, $M_{K\pi}$, Δ) par une gaussienne autour de ce point. Cela ne faciliterait pas les calculs.

Tout cet ensemble d'avantages et d'inconvénients montre clairement que cette méthode doit être considérée comme préliminaire et qu'il est nécessaire d'effectuer un meilleur traitement, celui du maximum de vraisemblance que je vais exposer maintenant.

III. Méthode du Maximum de Vraisemblance

Je commence par rappeler la formule utilisée :

$$C \frac{(\Delta^2 - \mu^2)^2}{\Phi(\Delta^2, M_{K\pi}, M_{P\pi})} \frac{\partial^3 \sigma}{\partial M_{K\pi}^2 \partial M_{P\pi}^2 \partial \Delta^2} = A_0 + A_1(\Delta^2 - \mu^2) + \dots \quad (19)$$

Selon la méthode du maximum de vraisemblance, je dois exprimer à partir de la formule (19) la probabilité P_K d'un événement, nombre proportionnel, par définition, à la section efficace différentielle au voisinage de cet événement. La constante de proportionnalité s'obtient en exprimant que la somme des probabilités des événements est égale à 1, autrement dit, en normalisant à 1 la fonction de probabilité. Ceci revient ici à normaliser la section efficace différentielle à la section efficace totale de la réaction à 4 corps.

La vraisemblance de mon échantillon par rapport à la loi donnée par la formule (19) est alors égale par définition au produit des probabilités P_K , soit

$$\mathcal{L} = \prod_K P_K$$

Les paramètres inconnus α_i à optimiser, tels A_0 ou A_1 , sont ensuite estimés en cherchant la valeur de ces paramètres rendant maximum la fonction $\mathcal{L}$, c'est-à-dire annulant les dérivées

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_i}$$

Dans la pratique, on simplifie bien les calculs, sans changer le résultat en optimisant le logarithme de $\mathcal{L}$, soit :

$$L = \text{Log } \mathcal{L} = \sum_K \text{Log } P_K$$

car alors :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = \sum_K \frac{1}{P_K} \frac{\partial P_K}{\partial \alpha_i} .$$

La procédure d'optimisation des paramètres est la suivante :
Je calcule littéralement le vecteur des dérivées premières $\partial L / \partial \alpha_i$ et la matrice carrée symétrique des dérivées secondes $\partial^2 L / \partial \alpha_i \partial \alpha_j$ (les α_i représentent ici aussi bien les termes du développement A_i que n'importe quel autre paramètre à optimiser). Les calculs sont plus ou moins simples, selon que les α_i interviennent linéairement ou non dans l'expression de P_K .

J'effectue ensuite une série d'itérations sur les accroissements des paramètres (vecteur $d\alpha_j$), données par :

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right) \cdot \begin{pmatrix} d\alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} \end{pmatrix}$$

ou en écriture matricielle : $L'' \cdot d\vec{\alpha} = L'$

soit : $d\vec{\alpha} = L''^{-1} \cdot L'$

Je recalculerai à chaque itération les dérivées et je m'arrête lorsque les dérivées premières sont "suffisamment" petites.

Un test simple, utilisant le signe de la quantité $\epsilon = L' \cdot L''^{-1} \cdot L'$, permet de se déplacer ainsi vers un maximum et non un minimum.

A chaque itération je dois donc également inverser la matrice des dérivées secondes. Après convergence, les incertitudes sur les valeurs ajustées des paramètres sont données par les racines carrées des termes

diagonaux de L''^{-1} . Si besoin est, l'incertitude sur une fonction des paramètres s'obtient également à partir de L''^{-1} , mais en faisant alors intervenir aussi les termes non diagonaux, c'est-à-dire les corrélations.

Si la fonction L était exactement parabolique par rapport aux paramètres dans tout un voisinage autour de son maximum, c'est-à-dire si $\mathcal{L}$ était une gaussienne, la procédure itérative utilisée donnerait le maximum cherché en une seule itération.

En pratique, la méthode nécessitant la donnée de valeurs de départ pour les paramètres, il faut de une à dix itérations, ce nombre dépendant bien sûr des valeurs de départ employées, de la précision requise sur l'optimisation des paramètres et du nombre de ces paramètres. On peut considérer comme une moyenne le chiffre de 3 à 4 itérations.

Avant de passer au détail des calculs littéraux pour deux paramétrisations particulières, je dois expliciter la méthode de calcul utilisée pour l'intégrale de normalisation de la section efficace différentielle.

Méthode d'intégration

La condition de normalisation s'écrit de manière générale :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^3 \sigma}{\partial M_{K\pi}^2 \partial M_{p\pi}^2 \partial \Delta^2} dM_{K\pi}^2 dM_{p\pi}^2 d\Delta^2 = \sigma_T = \text{SIG} \cdot N$$

en utilisant les mêmes notations que précédemment.

Ω désigne le volume physique $(M_{K\pi}^2, M_{p\pi}^2, \Delta^2)$ où l'on effectue l'ajustement. J'ai donc à calculer l'intégrale triple :

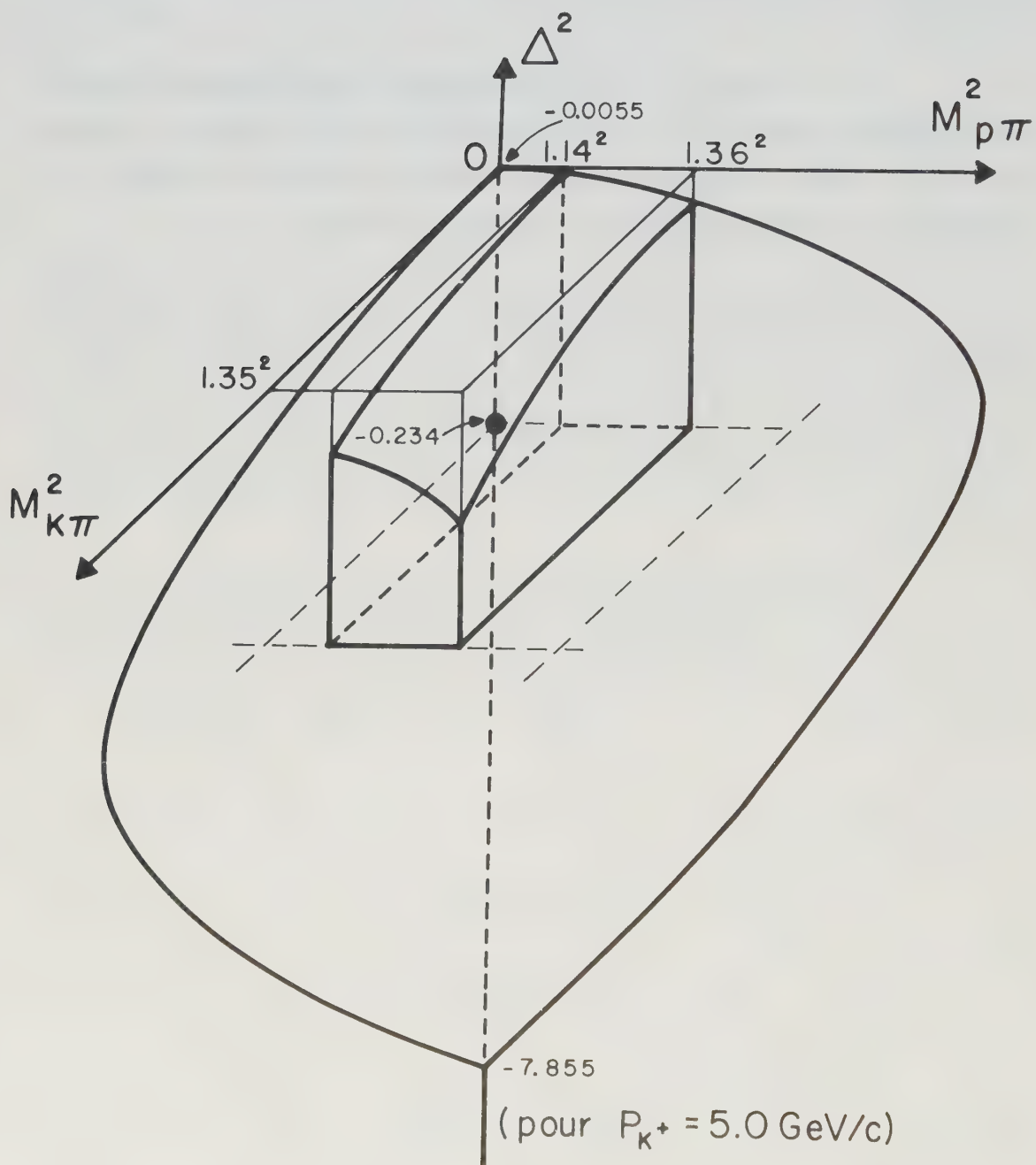


fig. B - 3

$$I = \frac{1}{C} \int_{\Omega} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} (A_0 + A_1 (\Delta^2 - \mu^2) + \dots)$$

en limitant le développement à l'ordre le plus bas possible.

Le problème est plus ou moins complexe, selon que j'effectue des ajustements dans des volumes suffisamment restreints pour supposer les A_i constants ou que je prends tout le volume disponible avec une paramétrisation plus complexe $A_i (M_{K\pi}, M_{p\pi}, \alpha_j)$, (cf. figures B-1 et B-3).

De toutes façons, les fonctions utilisées n'étant pas intégrables, il faut effectuer un calcul approché en divisant le volume d'intégration en un nombre suffisant de petites boîtes.

Mais il faut signaler qu'un problème intervient si certains paramètres α_j n'interviennent pas linéairement car il faut alors recalculer l'intégrale de normalisation à chaque itération de l'ajustement.

Dans le cas contraire, en effet, je peux sortir les paramètres et écrire la condition sous la forme :

$$I = \sum \alpha_i T_i = \sigma_T.$$

La renormalisation ne nécessite alors aucun calcul supplémentaire.

Si je me contente de prendre la valeur de la fonction F à intégrer en un point quelconque de chaque petit volume, un coin ou le centre par exemple, le résultat converge lentement lorsque j'augmente le nombre des boîtes, et les temps de calcul deviennent vite importants.

Aussi ai-je utilisé une méthode quadratique dite "méthode de Simpson". Sur chacun des petits rectangles ($M_{K\pi}^2, M_{p\pi}^2$) considérés, j'ai

à calculer une intégrale simple par rapport à Δ^2 . Je me place alors au centre du rectangle, je divise l'élément de volume d'intégration en $2N$ intervalles égaux de Δ^2 et je calcule F pour les $(2N + 1)$ bornes de ces intervalles, soit F_K , $K = 1$ à $2N + 1$.

Alors si j'appelle H la hauteur en Δ^2 de l'élément de volume considéré v (H est la différence entre le $\Delta_{\text{minimum}}^2$ correspondant au centre du rectangle et la limite en Δ^2 , 10, 15, $20\mu^2$, que l'on s'est fixé), la contribution de v à l'intégrale totale vaut, avec cette méthode,

$$T_{ij} = \frac{H}{6N} (F_1 + 4 F_2 + 2 F_3 + 4 F_4 + \dots + 4 F_{2N} + F_{2N+1})$$

et je n'ai plus qu'à sommer ces éléments T_{ij} sur tous les petits rectangles D_{ij} de $(M_{K\pi}^2, M_{p\pi}^2)$.

Avec cette méthode, la convergence en fonction du nombre de boîtes est bien plus rapide. Mais, quelle que soit la méthode de calcul utilisée pour la normalisation, l'estimation correcte de l'erreur est compliquée, voire impossible.

Il existe bien pour la méthode de Simpson une expression d'un majorant de l'erreur, mais on s'aperçoit bien vite que l'erreur véritable est souvent bien plus petite que ce majorant.

Aussi est-il plus judicieux de procéder directement, en regardant comment varient les résultats lorsque je change le nombre de boîtes. Je m'arrête lorsque par exemple, les sections efficaces extrapolées ne varient pas de plus d'un microbarn.

Ceci est obtenu lorsque je divise l'ensemble du volume total considéré pour les ajustements en $200 \cdot 60 \cdot 60$ à $250 \cdot 70 \cdot 70$ boîtes respectivement pour les variables $(M_{K\pi}^2, M_{p\pi}^2, \Delta^2)$. Si j'effectue des

ajustements sur des volumes restreints, je prends proportionnellement moins de boîtes. Dans tous les cas, le calcul des normalisations demande entre 50 et 80 secondes au CDC 6600.

Pour tous les tests, il suffit d'une précision bien moindre, et les normalisations s'obtiennent en quelques secondes.

Plus loin, au chapitre des résultats, il sera sous-entendu que l'erreur due au calcul des normalisations est complètement négligeable, de l'ordre de 10^{-5} en valeur relative.

Pour conclure, je dois faire remarquer que, suivant les publications, la formule d'extrapolation () est donnée avec :

$$\frac{\partial^3 \sigma}{\partial M_{K\pi}^2 \partial M_{p\pi}^2 \partial \Delta^2} \quad \text{ou avec} \quad \frac{1}{4M_{K\pi} M_{p\pi}} \frac{\partial^3 \sigma}{\partial M_{K\pi} \partial M_{p\pi} \partial \Delta^2}$$

ela ne change rien en théorie.

En pratique cela reste également vrai à la limite où l'on prend des boîtes infiniment petites pour calculer les intégrales précédentes c'est-à-dire en admettant que :

$$\int_{\Omega} F dM_{K\pi}^2 dM_{p\pi}^2 d\Delta^2 = \int_{\Omega} 4 M_{K\pi} M_{p\pi} F dM_{K\pi} dM_{p\pi} d\Delta^2 .$$

Quelques tests m'ont montré que la précision du calcul était suffisante pour que la différence entre les méthodes d'intégration soit complètement négligeable.

Je peux alors passer au détail des calculs littéraux. Pour ne pas compliquer la suite, je me limiterai coefficient L'extension à un degré quelconque du développement est évidente, elle demande seulement plus de temps de calcul et plus de calculs littéraux.

IV. Ajustements par intervalles de $M_{K\pi}$: "Extrapo - Int"

Je commence par expliciter les calculs dans le cas d'ajustements par intervalles de masse ($K^+\pi^-$), de manière analogue à ce qui a été fait par χ^2 . Les calculs littéraux sont alors très simples, mais je n'élimine qu'une partie des inconvénients énumérés dans la méthode de χ^2 : mon ignorance de la forme à priori des fonctions $\sigma_{K\pi}$, $A_1(M_{K\pi}, M_{p\pi})$ etc... m'oblige à passer par cette étape du traitement, où je suppose dans chaque intervalle $\sigma_{K\pi}$, A_1 , A_2 ... constants.

J'ai donc :

$$P_K \sim \frac{\partial^3 \sigma}{\partial M_{K\pi}^2 \partial M_{\pi}^2 \partial \Delta^2} = \frac{1}{C} \left(A_0 \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} + A_1 \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)} + A_2 \Phi \right)$$

En posant :

$$T_0 = \int \sigma_{p\pi} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} \quad T_1 = \int \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)} \quad T_2 = \int \Phi$$

La condition de normalisation s'écrit alors :

$$\sigma_{K\pi} T_0 + A_1 T_1 + A_2 T_2 = C \cdot \text{SIG} \cdot N = N \cdot V$$

V est une constante, la même pour tous les intervalles.

Ceci me donne par exemple A_2 par rapport à $\sigma_{K\pi}$ et A_1 :

$$A_2 = \frac{NV - \sigma_{K\pi} T_0 - A_1 T_1}{T_2}$$

alors

$$\begin{aligned}
 P_K &= \frac{1}{C} \frac{1}{\text{SIG}} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} \left(A_0 + A_1 (\Delta^2 - \mu^2) + \frac{NV - \sigma_{K\pi} T_0 - A_1 T_1}{T_2} (\Delta^2 - \mu^2)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{V} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} \left[\sigma_{K\pi} \left(\sigma_{P\pi} - \frac{T_0}{T_2} (\Delta^2 - \mu^2)^2 \right) + A_1 \left((\Delta^2 - \mu^2) - \frac{T_1}{T_2} (\Delta^2 - \mu^2)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{NV}{T_2} (\Delta^2 - \mu^2)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{V} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} (\sigma_{K\pi} F_0 + A_1 F_1 + G)
 \end{aligned}$$

et

$$L = \sum_K \text{Log} (\sigma_{K\pi} F_0 + A_1 F_1 + G) + \sum_K \text{Log} \left(\frac{1}{V} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} \right)$$

La deuxième somme ne faisant intervenir aucun paramètre à optimiser, je peux l'oublier complètement sans modifier les résultats. Simplement la vraisemblance L ne sera déterminée qu'à une constante additive près. Cela m'évite beaucoup de calculs supplémentaires.

Les deux paramètres $\sigma_{K\pi}$ et A_1 intervenant de façon linéaire il n'y a aucun problème et la méthode d'ajustement explicitée plus haut me donne le résultat. De celui-ci et de la condition de normalisation, je déduis A_2 avec son incertitude.

Il faut noter que le résultat serait exactement le même si j'optimisais $\sigma_{K\pi}$ et A_2 pour en déduire ensuite A_1 .

Avantages et Inconvénients d' "Extrapo - Int"

Parmi les avantages il faut noter :

- 1) Les normalisations étant calculées sur tout le volume utile, je tiens compte de tous les événements à faible Δ^2 .
- 2) Tout en conservant un seul intervalle pour la bande du N^* , je peux introduire $\sigma_{p\pi} = f(M_{p\pi})$ sous la forme que je veux : une constante, une Breit et Wigner correctement normalisée, ou, ce qui est le mieux, la table des valeurs expérimentales telle que je peux la trouver dans la référence (B-5). En utilisant cette dernière forme, je n'introduis aucun biais, à condition toutefois de supposer que les coefficients A_1 , A_2 ... ne varient pas trop dans la bande du N^* ou du moins que les supposer indépendants de $M_{p\pi}$ ne change rien à la détermination de $\sigma_{K\pi}$. On verra un peu plus loin que cette supposition est vérifiée.
- 3) L'ajustement sur un intervalle se fait maintenant en une seule étape et je ne perds aucune information, au moins de ce côté.
- 4) Le nombre d'événements par intervalle de $M_{K\pi}$ est suffisant pour que je puisse prendre des intervalles disjoints, et en plus grand nombre que précédemment.

Par contre, l'ignorance dans laquelle je suis pour donner une forme analytique à priori aux divers paramètres $\sigma_{K\pi}, A_1, A_2$... en fonction de $M_{K\pi}$ m'oblige à opérer par intervalles étroits de masse en supposant ces paramètres constants dans chaque intervalle. J'ai réussi à ce niveau à éliminer les 3 premiers inconvénients de la méthode de χ^2 , mais les inconvénients 4) et 5) demeurent.

Résultats

Sans parler vraiment des résultats numériques obtenus avec cette méthode, j'ai besoin d'en donner un petit aperçu pour justifier les programmes suivants.

1) $\sigma_{K\pi} = f(M_{K\pi})$ se compose a) d'un fonds relativement faible, croissant lentement à partir d'une valeur quasi-nulle au seuil, et à peu près constant pour les $M_{K\pi}$ élevées b) d'un pic très prononcé autour de $M_{K\pi} \approx 0.895$ GeV.

2) Les incertitudes sur la détermination des paramètres $A_1, A_2 \dots$ sont très grandes par rapport aux valeurs de ceux-ci.

Programme "Fit 2 bod"

En utilisant le résultat No. 1 ci-dessus, j'ai écrit un petit programme afin d'ajuster sur les points de la courbe $\sigma_{K\pi}$ obtenus précédemment les paramètres du K_{890}^* ainsi observé. Notons qu'il est absolument nécessaire d'avoir pour cela effectué les ajustements sur des intervalles de $M_{K\pi}$ disjoints. Sinon, cela reviendrait à compter des événements plusieurs fois, ou, ce qui revient au même, à donner aux événements des poids différents.

J'ai utilisé la paramétrisation suivante, qui me semblait pouvoir représenter avec une bonne approximation ce que j'observais :

$$\sigma(M_{K\pi}) = \beta \left[\alpha \frac{Bw(K^*)}{T} + (1 - \alpha) \frac{q/M_{K\pi}}{T'} \right] \quad (20)$$

où

- q désigne toujours $\bar{q}_{K\pi}$ moment du K ou du π dans le système $K\pi$

$$- Bw(K^*) = \frac{f(M_{K\pi})}{(M_{K\pi} - M_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad f(M_{K\pi}) = \frac{q^3}{M_{K\pi}^3}$$

par exemple, pour respecter le comportement au seuil d'une onde P résonante

$$- \quad T = \int_{\text{seuil}}^{1.35} Bw(K^*) dM_{K\pi} \quad , \quad T' = \int_{\text{seuil}}^{1.35} \frac{q}{M_{K\pi}} dM_{K\pi}$$

pour que α représente le pourcentage de K^* dans l'intervalle de $M_{K\pi}$ considéré.

Le programme "Fit 2 bod" me donne par méthode de χ^2 les paramètres α et β avec leurs incertitudes ainsi que la forme de la courbe ainsi ajustée.

En faisant varier les valeurs de M_0 et de Γ je peux trouver les valeurs donnant le meilleur χ^2 , soit $\chi_{\min}^2$. Les incertitudes sur M et Γ sont données par :

$$\chi^2(M \pm dM, \Gamma) = \chi^2(M, \Gamma \pm d\Gamma) = \chi_{\min}^2 + 0.5 \quad .$$

La valeur de $\chi_{\min}^2$ me donne également une idée de la qualité de l'ajustement, compte tenu du nombre de degrés de liberté.

Pour revenir à la paramétrisation employée (20), le fonds utilisé n'est autre que l'espace de phase 2 corps relativiste. Cela peut donc correctement représenter la partie non résonante de la courbe à masse élevée (ce n'est pas nécessairement vrai, mais c'est possible). Près du seuil, puisque $\sigma_{K\pi}$ semble très proche de 0, je n'ai pas introduit de constante.

Avant de passer aux résultats, je dois faire remarquer que la largeur du pic du K^* doit être différente ici de celle que l'on observe normalement sur une distribution de masse effective, car il intervient dans la détermination de la courbe $\sigma_{K\pi}$ les incertitudes sur les 3 variables $M_{K\pi}$, $M_{p\pi}$, Δ^2 , au lieu d'une seule variable habituellement (cf. inconvénient No. 5 de la méthode de χ^2).

Prochaine étape

D'après le résultat 2) cité plus haut il apparaît que les paramètres A_1 , A_2 ... ne sont pas significatifs. Par conséquent, en introduisant pour $\sigma_{K\pi}$ une paramétrisation analogue à celle de "Fit 2 bod", et pour A_1 , A_2 ... n'importe quelle fonction de $M_{K\pi}$, je vais pouvoir effectuer un ajustement global sur l'ensemble de mes événements.

Il est inutile de faire dépendre A_1 , A_2 ... de $M_{p\pi}$ puisque la dépendance est déjà faible en $M_{K\pi}$ (un polynôme de degré 1 ou de degré 4 en $M_{K\pi}$ pour A_1 donne exactement le même résultat pour $\sigma_{K\pi}$). Pour plus de sécurité, j'ai cependant vérifié cette faible dépendance en $M_{p\pi}$.

V. Ajustement global : "Extrapo - Exp"

Le programme qui va ainsi effectuer l'ajustement global est dans son principe tout à fait analogue à "Extrapo - Int" qui procède par intervalles de masse ($K^+\pi^-$), mais le nombre des paramètres à optimiser est maintenant bien plus élevé et les calculs littéraux relativement complexes.

Le nom d' "Extrapo - Exp" provient du fait que la paramétrisation de $\sigma_{K\pi}$ est purement expérimentale, déduite de l'observation des premiers résultats.

Plus tard, j'effectuerai un autre ajustement global, avec une paramétrisation différente de $\sigma_{K\pi}$, plus théorique; en particulier j'imposerai à la Breit et Wigner du K^* de ne pas dépasser la limite d'unitarité pour une onde $P_{1/2}$. Ce sera "Extrapo - TH" ; je n'en donnerai que les résultats, les calculs étant tout à fait analogues à ceux qui vont suivre (je me bornerai au coefficient A_1 cette fois, pour ne pas allonger les calculs).

Je pars donc de :
$$L = \sum_K \text{Log} (A_0 + A_1(\Delta^2 - \mu^2))$$

avec les notations et la paramétrisation suivante :

- $M = M_{K\pi}$ par abréviation , $a = \text{seuil} = 0.6334 \text{ GeV}$, $b = 1.35 \text{ GeV}$

- $A_0 = \sigma_{K\pi} \cdot \sigma_{p\pi} = \beta(\alpha Bw(K^*) + \gamma \frac{T'}{T} + (1 - \alpha - \gamma) \frac{q}{M}) \cdot \sigma_{p\pi}$

- $Bw(K^*) = \frac{K}{(M - M_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} f(M)$

- $T = \int_a^b dM = (b - a)$, $T' = \int_a^b \frac{q}{M} dM$

- $K = \frac{T'}{\int_a^b \frac{f(M) dM}{(M - M_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}$

- $f(M) = \frac{q^3}{M^3}$

- $\sigma_{p\pi^+}$ donné par une table de valeurs. Entre ces valeurs, j'obtiens $\sigma_{p\pi^+}$ par une interpolation linéaire. Le nombre de valeurs de la table est suffisant pour que ceci constitue une bonne approximation de la courbe exacte.

- $A_1 = \text{polynôme en } M_{K\pi} = \delta + \epsilon M + \zeta M^2 + \eta M^3 + \lambda M^4$

Possibilités du Programme

Par simple changement d'une carte je peux :

1) prendre $f(M)$ de forme quelconque. Pour les résultats j'aurai toujours $f(M) = q^3/M^3$ mais le programme pouvant être utilisé dans

d'autres canaux, c'était préférable. De plus, si l'on choisit $f(M) \equiv 1$, le calcul de K peut se faire directement ainsi que celui de ses 5 dérivées premières et secondes par rapport à M_0 et Γ ; certains calculs ultérieurs sont alors plus rapides, sans calculs approchés et le programme possède une logique spéciale pour ce cas particulier.

2) ajuster le paramètre γ , ou imposer $\gamma = 0$; on retrouve alors la paramétrisation (20).

3) prendre A_1 et A_2 de degré quelconque en M .

J'ai utilisé toutes ces possibilités en comparant les divers résultats.

Paramètres à optimiser

Avec la paramétrisation choisie, entre les bornes a et b , α représente le pourcentage de K^* et $(1 - \alpha - \gamma)$ celui du fonds; γ qui sera très faible, donne en principe la section efficace au seuil; β est la constante de proportionnalité.

La liste des paramètres à optimiser est alors la suivante :

COE (1)	=	M_0	masse du K^*
(2)	=	Γ	largeur du K^*
(3)	=	α	
(4)	=	β	
(5)	=	γ	
COE (6) à COE (10)			expression de A_1

Normalisations

La condition de normalisation s'écrit :

$$\int_v (A_0 + A_1 (\Delta^2 - \mu^2)) \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} = N \cdot \text{SIG} \cdot C = V$$

N désigne ici le nombre total d'événements et v le volume global représenté sur la figure

$$\text{Posons : } B(1) = \int_v B_w(K^*) \sigma_{P\pi} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2}$$

$$B(2) = \frac{T'}{T} \int_v \sigma_{P\pi} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2}$$

$$B(3) = \int_v \frac{q}{M} \sigma_{P\pi} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2}$$

$$B(K+3) = \int_v M^{K-1} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} \quad K = 1, 2 \dots 5$$

d'où la condition :

$$\beta \left(\alpha B(1) + \gamma B(2) + (1-\alpha-\gamma) B(3) \right) + \sum_{i=6}^{10} \text{COE}(i) \cdot B(i-2) = V$$

Ce qui détermine par exemple le dernier coefficient par rapport aux autres. En posant

$$B'(i) = \frac{B(i)}{B(8)} \quad i = 1, \dots, 7$$

on a :

$$\begin{aligned} \text{COE}(10) = & \frac{V}{B(8)} + \beta \alpha \left(B'(3) - B'(1) \right) + \beta \gamma \left(B'(3) - B'(2) \right) - \beta B'(3) \\ & - \sum_{i=6}^9 \text{COE}(i) B'(i-2) \end{aligned}$$

En reportant cette expression de COE(10) dans la fonction de vraisemblance L , j'obtiens la fonction dont je cherche à optimiser les 9 paramètres.

Expression de L

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_K \text{Log} \left\{ \frac{V(\Delta^2 - \mu^2) M^4}{B(8)} + \beta\alpha \left[Bw(K^*) \sigma_{p\pi} - \frac{q}{M} \sigma_{p\pi} + M^4(\Delta^2 - \mu^2) (B'(3) - B'(1)) \right] \right. \\
 &\quad + \beta\gamma \left[\frac{T'}{T} \sigma_{p\pi} - \frac{q}{M} \sigma_{p\pi} + M^4(\Delta^2 - \mu^2) (B'(3) - B'(2)) \right] \\
 &\quad \left. + \beta \left[\frac{q}{M} \sigma_{p\pi} - M^4(\Delta^2 - \mu^2) B'(3) \right] + \sum_{i=6}^9 \text{COE}(i) (\Delta^2 - \mu^2) (M^{i-6} - M^4 B'(i-2)) \right\} \\
 &= \sum_K \text{Log} \left(K + \beta\alpha A + \beta\gamma B + \beta C + \sum_{i=6}^9 \text{COE}(i) \text{STEP}(i) \right) \\
 &= \sum_K \text{Log } FL_K
 \end{aligned}$$

Le calcul des dérivées L' et L'' se trouve en appendice A.

J'obtiens ainsi au bout d'un calcul un peu fastidieux le vecteur L' et la matrice L'' , et avec la procédure habituelle, j'obtiens les valeurs cherchées des neuf paramètres; la condition de normalisation me donne COE(10) avec son incertitude.

Cependant, j'ai à recalculer à chaque itération un certain nombre d'intégrales intervenant dans la condition de normalisation et cela pose un petit problème de temps de calcul.

Renormalisation

J'ai à calculer en effet à chaque fois l'intégrale I et ses 5 dérivées premières et secondes par rapport à M_0 et Γ . Comme il s'agit d'intégrales simples, j'obtiens une excellente précision sur le résultat en un temps très court.

Mais j'ai aussi à calculer ensuite l'intégrale $B(1)$ et ses 5 dérivées premières et secondes. Or, on a vu que le temps de calcul de ce genre d'intégrales triples était assez conséquent.

$$B(1) = \int_v Bw(K^*) \sigma_{p\pi^+} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} dM_{K\pi}^2 dM_{p\pi}^2 d\Delta^2$$

Pour résoudre le problème je mets en mémoire, lors du calcul complet des normalisations, avant la première itération, les éléments d'intégrale :

$$dB(i) = \int_{dS_i} \sigma_{p\pi^+} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} dM_{p\pi}^2 d\Delta^2$$

dS_i est la projection sur le plan $(M_{p\pi}^2, \Delta^2)$ de la tranche du volume global v comprise entre les 2 valeurs de $M_{K\pi}^2$ de l'intervalle i considéré.

Si j'ai divisé mon intervalle de $M_{K\pi}^2$ en 200 intervalles, le calculateur a en mémoire ces 200 intégrales, indépendantes de tout paramètre, de M_0 et Γ en particulier.

Alors le calcul de $B(1)$ et de ses dérivées se ramène au calcul d'intégrales simples.

Finalement, la renormalisation nécessite de l'ordre d'une seconde au CDC 6600, ce qui est tout à fait raisonnable.

Avantages et Inconvénients d' "Extrapo - Exp"

Les deux derniers inconvénients dont j'ai parlé plus haut disparaissent à peu près complètement avec ce programme. En effet :

1) A condition de supposer que la paramétrisation utilisée est correcte sur tout le volume v , $\sigma_{K\pi}$, A_1 , A_2 ... varient continûment sur ce volume et je n'ai plus l'inconvénient de considérer ces paramètres comme constants sur tout un élément de volume.

2) Tous les événements étant considérés en une seule fois, et la densité d'événements variant assez lentement au voisinage de la surface limitant le volume v , je n'ai plus l'inconvénient d'une mauvaise détermination du nombre N d'événements par boîte.

Il n'en demeure pas moins cependant que les incertitudes sur $M_{K\pi}^2$, $M_{p\pi}^2$ et Δ^2 existent toujours et qu'elles contribuent à fausser un peu la largeur du pic du K^* . Mais cet effet direct est bien plus faible que celui qu'entraînent ces incertitudes sur $\sigma_{K\pi}$, via l'incertitude sur N .

Cependant, si j'avais à traiter des événements obtenus par ajustements à 1 contrainte il faudrait quand même remplacer chaque événement par une gaussienne pour faire un bon traitement. Ici, ce n'est pas nécessaire.

3) Les deux légères restrictions précédentes étant supposées négligeables, les incertitudes calculées par le programme sur les paramètres ou sur la hauteur de la courbe $\sigma_{K\pi}$ sont alors exactes; jusqu'ici, au contraire, les incertitudes calculées étaient sous-estimées.

Pour conclure ce chapitre, je dirai que si j'ai obtenu avec ce programme un traitement exhaustif de mes données, c'est quand même avec un léger remords.

Je ne dispose en effet d'aucun moyen pour tester valablement la qualité de la paramétrisation utilisée pour $\sigma_{K\pi}$; même si je pense qu'elle n'est pas mauvaise, elle est peut-être un peu inexacte.

Cependant, imposer ainsi une certaine continuité d'un point à l'autre de la courbe est une amélioration certaine par rapport aux ajustements indépendants par intervalles, et c'est pourquoi j'ai écrit ce programme.

C. LES RESULTATS

I. Description des lots d'événements

J'ai utilisé les programmes qui viennent d'être décrits sur plusieurs lots d'événements provenant de la DST de la collaboration mondiale sur les interactions de K^+ en chambres à bulles. Cette DST est périodiquement mise à jour ainsi que les diverses valeurs de sections efficaces s'y rapportant. Une copie de la table de ces valeurs est donnée en appendice B - I.

Pour accréditer la théorie, il est en effet indispensable, entre autres résultats, que celle-ci donne la même section efficace ($K^+\pi^-$) quelle que soit l'énergie de l'expérience considérée.

Les trois lots que j'ai choisis sont décrits dans le tableau (C - 1).

Les figures (C - 1) à (C - 4) donnent quelques exemples de distributions de masses effectives et de transferts de moment de l'expérience à 5.0 GeV/c. Aux autres énergies on a des distributions tout à fait comparables.

D'un autre côté, l'incertitude sur la section efficace 4-corps σ_T , quand elle est donnée, me semble, à mon avis, un peu sous-estimée (voir figure C - 5 donnant σ_T en fonction du moment du K^+ incident).

J'ai effectué tous les tests de mes programmes sur le lot d'événements à 5.0 GeV/c. Pour ne pas revenir à chacun de ces tests sur le nombre N d'événements en fonction de la coupure en Δ^2 , je donne ici quelques valeurs de cette fonction $N(\Delta^2)$ dans le tableau (C - 2) .

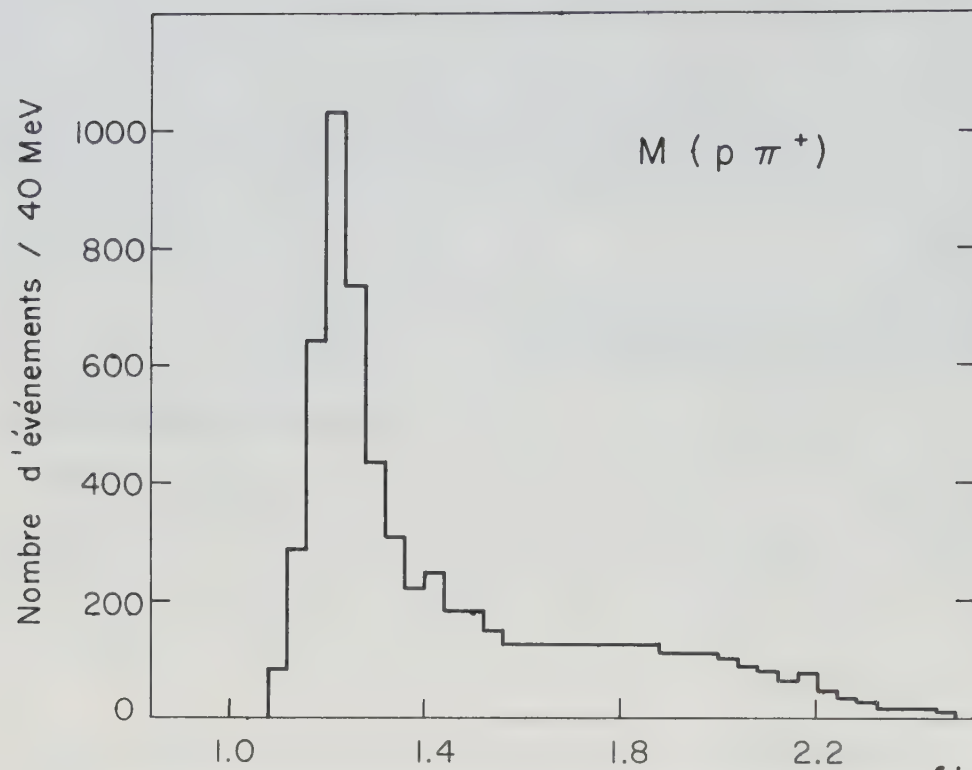


fig. C-1

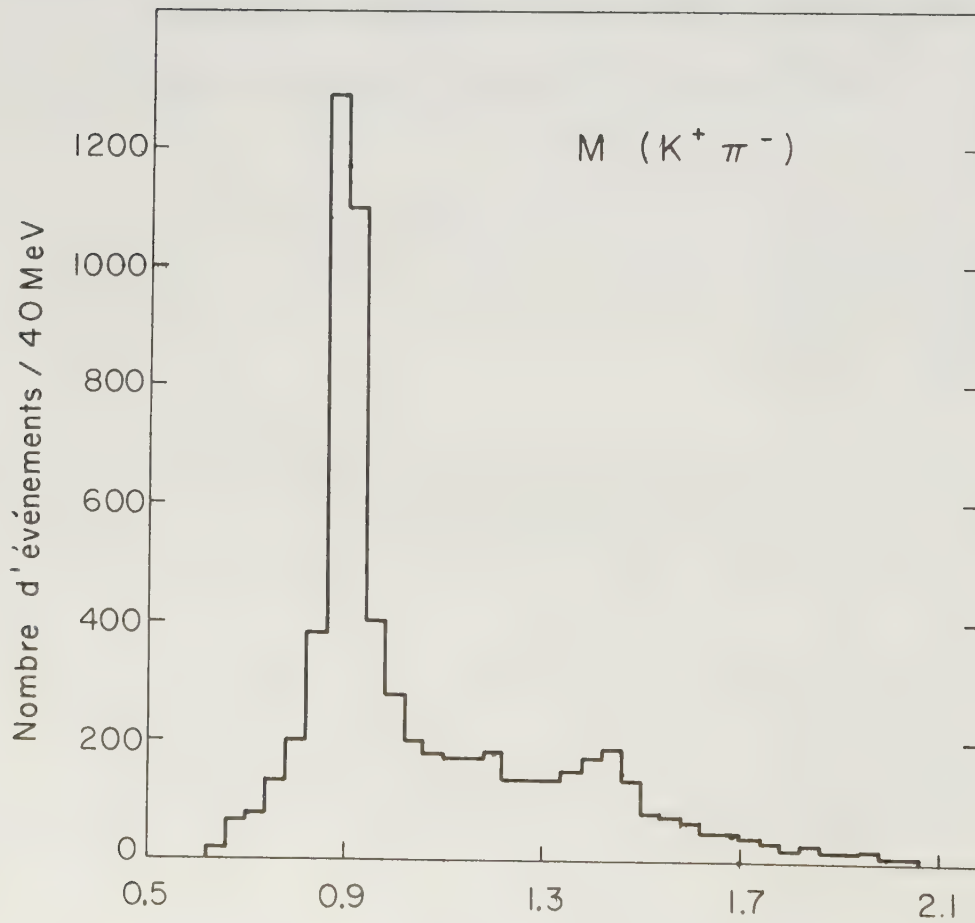


fig. C-2

Tableau C-1

Moment du K^+ incident (GeV/c)	Expérience effectuée par	Nombre total d'événements 4 branches ($K^+p_\pi^+\pi^-$) = N	Section efficace de la réaction (millibarns) = σ_T	Nombre de millibarns par événement = SIG	$\frac{\Delta \text{SIG}}{\text{SIG}}$	Nombre d'évé- nements après les coupures: $ \Delta^2 < 12\mu^2$ $M_{K\pi} < 1.35$ $1.14 < M_{p\pi} < 1.36$
5.0	Collaboration CERN-Bruxelles	6347	(1.80 $\pm$ 0.15)	0.000283	8.3 %	1558
5.5	John Hopkins Univ.	9489	(1.83 $\pm$ 0.20)	0.0001928	10.9%	2566
9.0	L.R.L. (Berkeley)	2918	(1.16 $\pm$?)	0.0003975	?	545

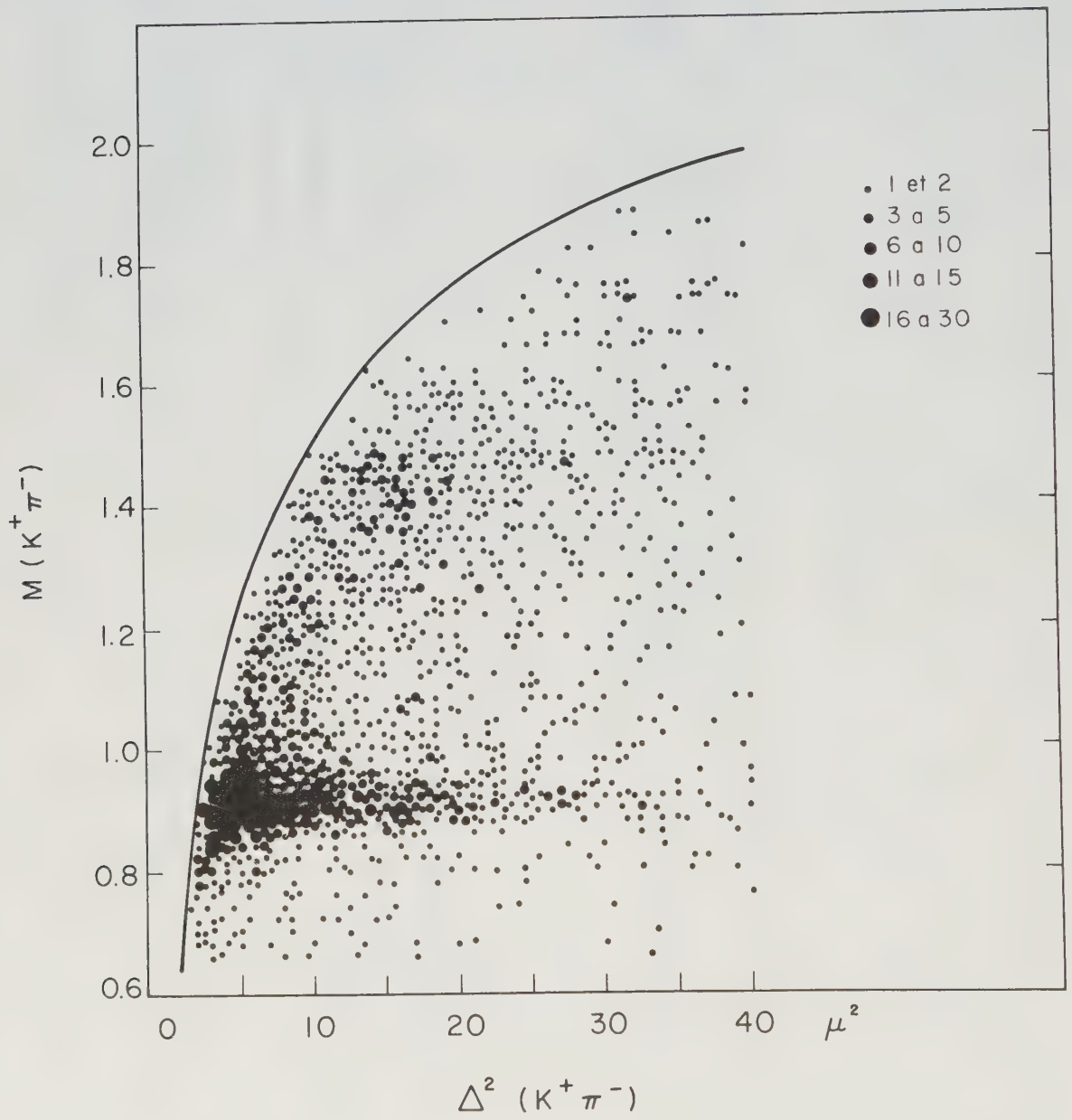


fig. C-3

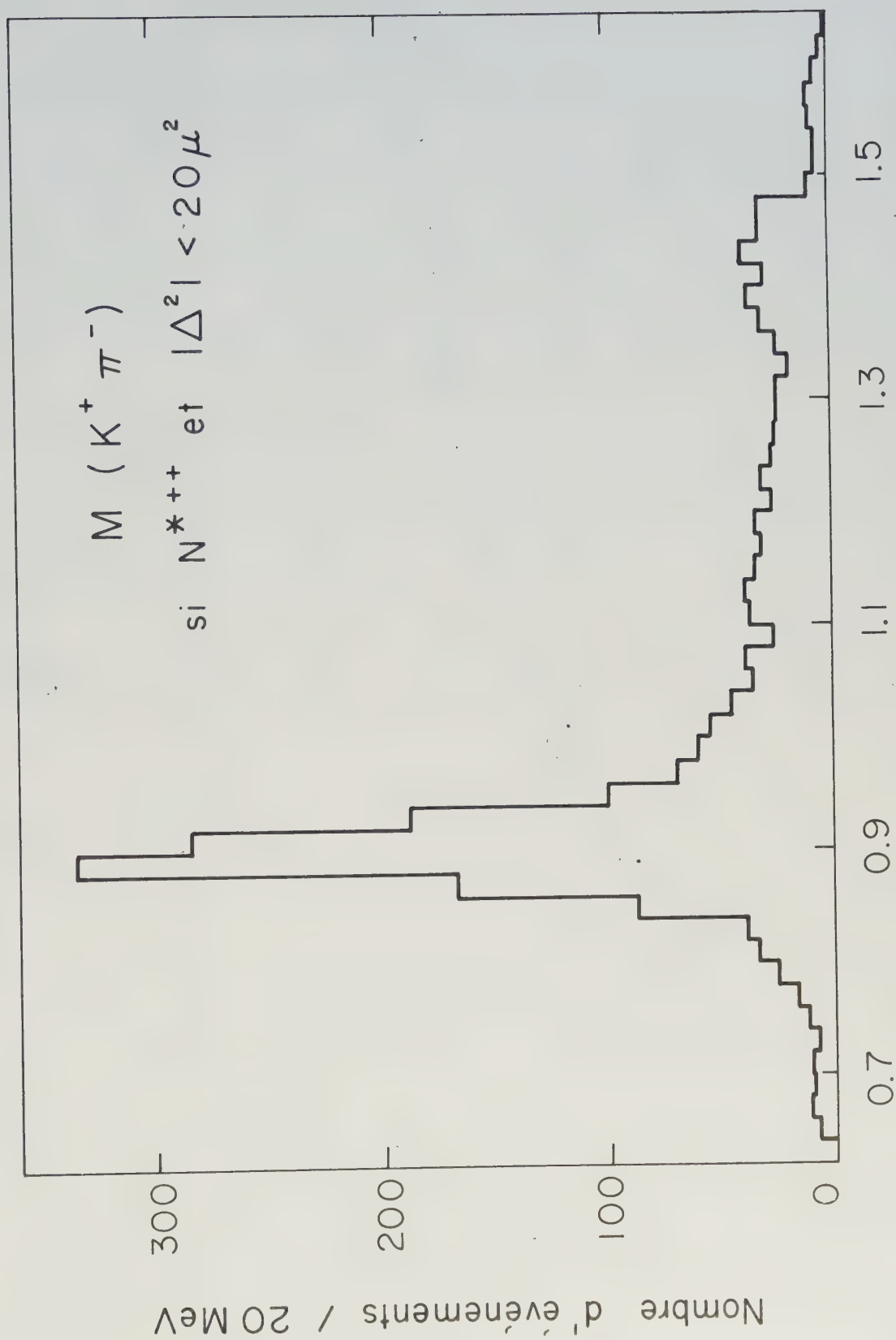


fig. C - 4

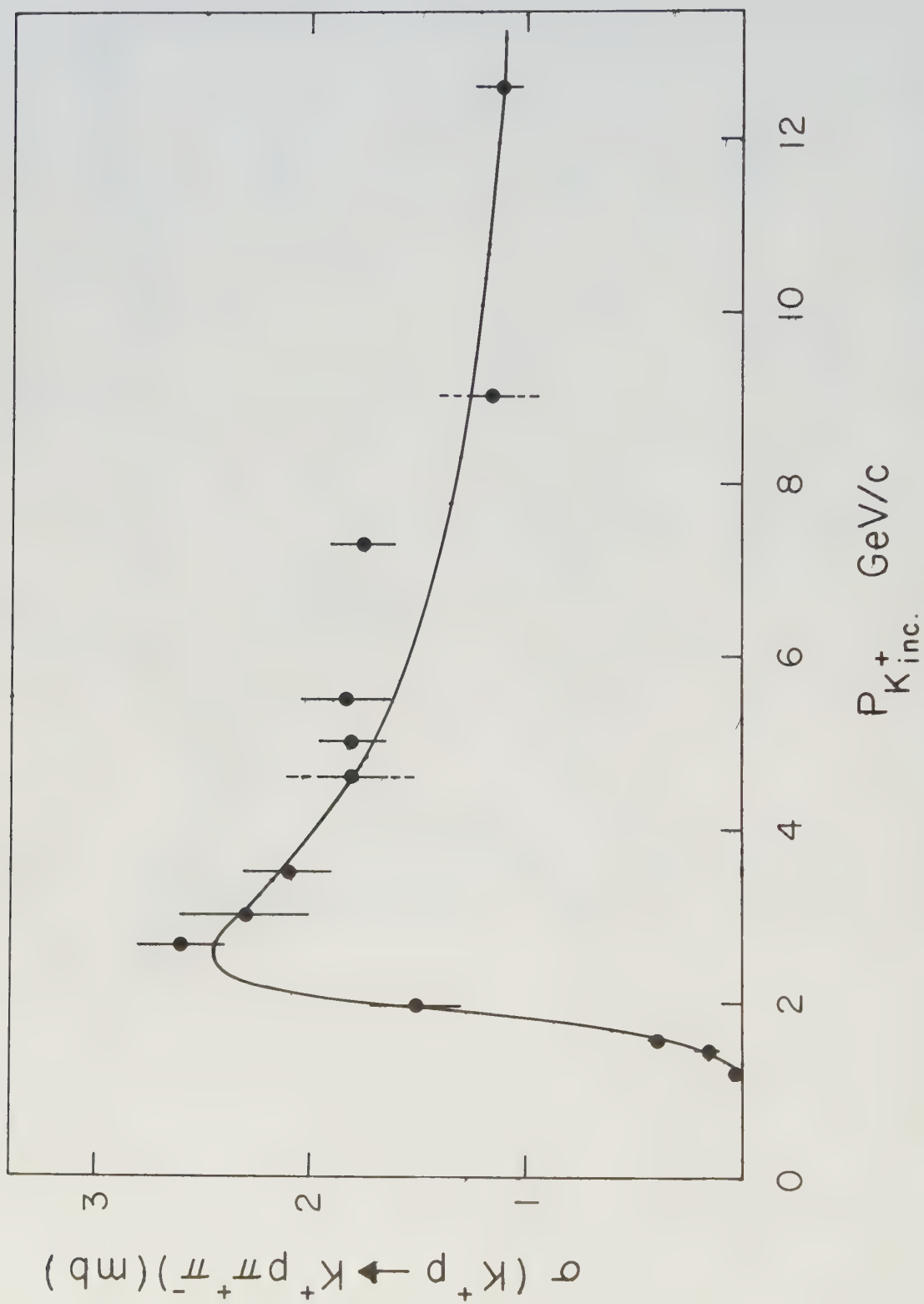


fig. C - 5

Tableau C-2

$p = 5.0 \text{ GeV/c}$ $M_{K\pi} < 1.35$ $1.14 < M_{p\pi} < 1.36$						
$ \Delta^2 \leq$	$5\mu^2$	$8\mu^2$	$10\mu^2$	$12\mu^2$	$15\mu^2$	$20\mu^2$
nombre d'événements	590	1123	1387	1558	1734	1975

II. La section efficace $\sigma_{p\pi^+}$

Il est bien évident que la meilleure façon de représenter la section efficace de diffusion élastique $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ est de prendre un tableau de valeurs expérimentales.

On a vu cependant que cette façon de procéder n'était pas toujours possible, par exemple dans la méthode du χ^2 , étant donnée la statistique dont je dispose.

D'autre part, les résultats variant notablement selon la manière dont on introduit cette section efficace, j'ai cru bon de donner les résultats correspondants.

J'ai utilisé les 3 formes suivantes :

a) $\sigma_{p\pi^+} = \text{Cte.}$ Cette constante a été prise égale à 100 millibarns. Il s'agit d'une valeur moyenne (par rapport à $M_{p\pi^+}$) déterminée à partir d'une compilation de résultats expérimentaux (Réf. C-1) et utilisée par les physiciens de ma collaboration.

J'ai calculé moi-même cette valeur moyenne à partir de la compilation effectuée par Focacci et Giacomelli (Réf. B-5) ainsi qu'à

partir d'une étude des déphasages π -nucléon (Réf. C-2). Je trouve respectivement $\bar{\sigma} = 103.5$ mb et $\bar{\sigma} = 104.9$ mb, valeurs compatibles avec la précédente. Les courbes données par ces trois références sont d'ailleurs très voisines.

Notons qu'il faudrait théoriquement introduire dans les calculs l'incertitude expérimentale sur $\bar{\sigma}$ ($d\bar{\sigma} \approx 2$ à 3 mb), mais celle-ci est négligeable par rapport à celle de la section efficace σ_T et je n'en tiendrai pas compte par la suite.

$$b) \quad \sigma_{p\pi}^+ = Bw(N^*) = \frac{K}{(M-M_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

J'ai utilisé pour cette expression de Breit et Wigner les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} M_0 &= 1.25 \text{ GeV} \\ \Gamma &= 0.120 \text{ GeV} \\ K &= 0.616 \text{ mb} \times \text{GeV}^2 . \end{aligned}$$

K est tel que la valeur moyenne de la fonction de Breit et Wigner soit égale à 100 millibarns sur l'intervalle 1.14 - 1.36 .

Remarquons qu'avec la valeur choisie pour M_0 , la constante K est identique, que l'on prenne la valeur moyenne en $M_{p\pi}$ ou en $M_{p\pi}^2$

c) $\sigma_{p\pi}^+$ tabulée : $\sigma_{p\pi}^+$ est obtenue par interpolation sur la table de valeurs de la Référence C-2.

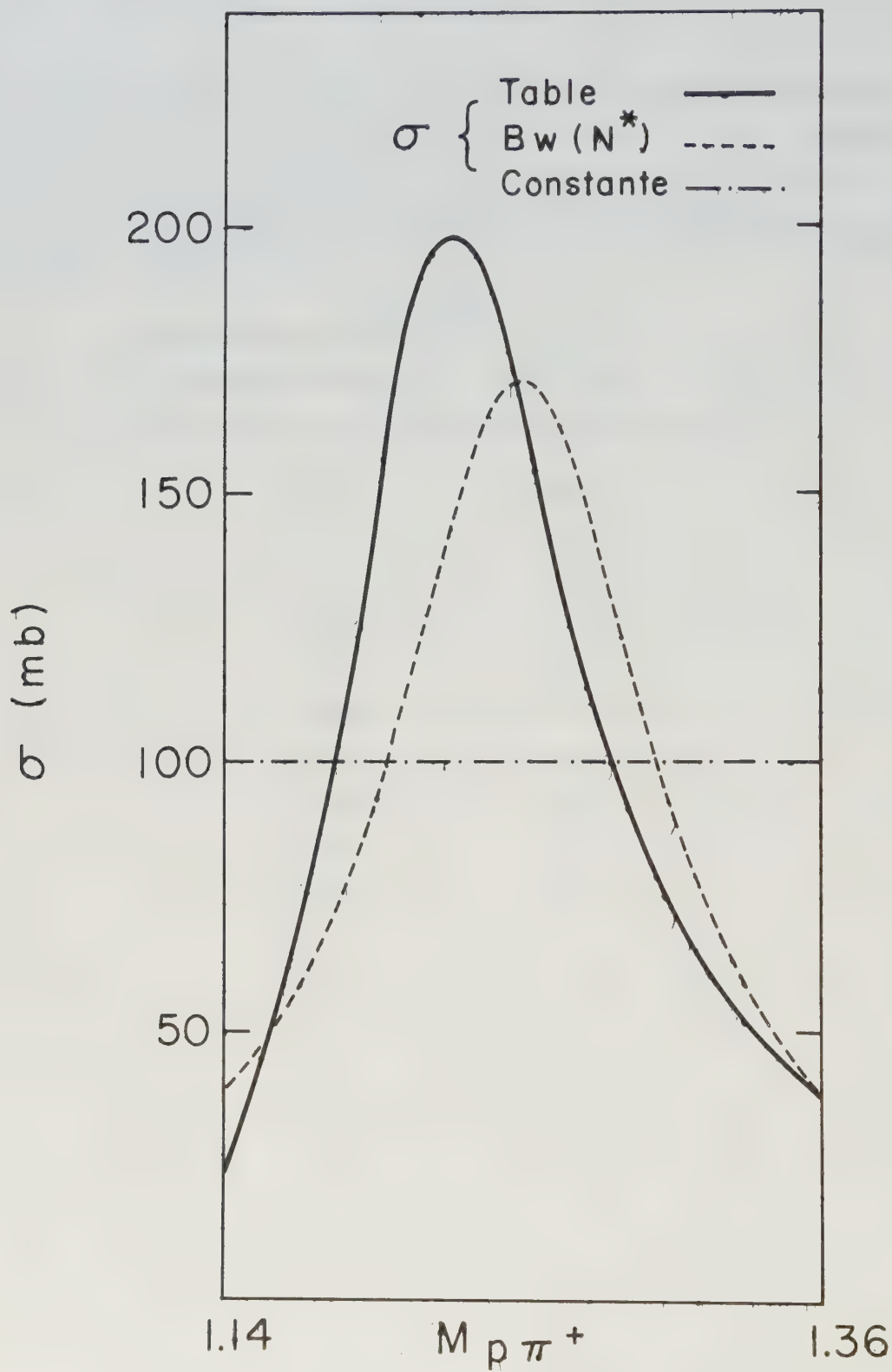
En fait, pour simplifier les calculs, j'ai commencé par tracer le plus précisément possible une courbe à la main sur les points donnés dans la référence précédente. Dans les régions de la courbe où une

interpolation linéaire n'aurait point suffi, j'ai ajouté quelques valeurs.

Finalement, j'ai utilisé les 25 points suivants (l'astérisque désigne les valeurs déterminées visuellement) donnés dans le tableau (C-3).

tableau C-3

$M(p_{\pi}^+)$	$\sigma_{p_{\pi}^+}$ (millibarns)
* 1.14	26.
1.148	36.37
1.16	57.70
1.173	80.30
1.178	95.32
1.186	116.01
1.195	142.25
1.202	169.23
* 1.207	182.5
1.213	192.41
1.217	195.65
1.222	197.89
1.231	196.78
1.235	191.96
1.239	185.57
1.248	169.77
1.252	158.51
1.255	153.36
1.259	145.59
1.275	112.76
1.292	88.94
* 1.305	74.
1.320	60.61
* 1.340	48.
* 1.360	38.7



Section efficace élastique



fig. C-6

Pratiquement, j'ai choisi la référence C-3 par commodité, car elle me donnait directement $\sigma_{p\pi^+}$ en fonction de $M_{p\pi^+}$ et sans lissage à effectuer au préalable.

Cependant, pour beaucoup de tests, je me suis contenté de l'approximation de la Breit et Wigner qui nécessitait moins de calculs et surtout un sous-programme de moins. Les résultats diffèrent en pratique de 5 à 10 % principalement à cause de la différence entre les valeurs moyennes. Ceci n'enlève rien à la valeur des tests effectués, ces différences étant d'un test à l'autre, quasiment constantes en valeur relative.

La figure (C-6) donne les formes attribuées à la section efficace élastique $p\pi^+ \rightarrow p\pi^+$.

Je vais maintenant étudier l'un après l'autre les divers paramètres et possibilités d'effectuer l'extrapolation avec leur incidence sur le résultat de l'ajustement.

III. Influence des faibles Δ^2

Je compare ici (tableau C-4) le résultat de l'ajustement de χ^2 avec celui d' "Extrapo - Int", dans les conditions :

a) $|\Delta^2| \leq 20\mu^2$, b) $\sigma_{p\pi^+} = \text{cte}$, c) ajustement linéaire

De cette manière, puisque l'ajustement par χ^2 n'a été effectué que dans ces conditions, j'ai comme différences :

1) utilisation du maximum de vraisemblance au lieu du χ^2 comme estimateur.

2) utilisation de tous les événements à faible transfert de moment.

tableau C-4

Intervalles de $M_{K\pi}$	(A) χ^2 ($\sigma \pm d\sigma$) _{mb}	(B) Max.de vraisemblance ($\sigma \pm d\sigma$) _{mb}	Nombre d'événements (A)	Nombre d'événements (B)
0.63 - 0.86	10 $\pm$ 1	8.6 $\pm$ 0.7	167	258
0.80 - 0.88	27 $\pm$ 3	30.7 $\pm$ 1.9	216	321
0.86 - 0.89	70 $\pm$ 7	76.4 $\pm$ 5.4	227	327
0.88 - 0.90	111 $\pm$ 11	112.2 $\pm$ 8.3	250	336
0.89 - 0.91	110 $\pm$ 11	113.7 $\pm$ 8.0	243	329
0.90 - 0.92	109 $\pm$ 10	99.4 $\pm$ 7.7	217	286
0.91 - 0.94	65 $\pm$ 7	60.4 $\pm$ 5.4	214	295
0.92 - 0.98	35 $\pm$ 4	36.0 $\pm$ 2.9	237	334
0.94 - 1.06	18 $\pm$ 2	22.7 $\pm$ 1.4	210	358
0.98 - 1.16	9 $\pm$ 1	15.8 $\pm$ 1.0	163	362
1.03 - 1.13	8 $\pm$ 2	12.6 $\pm$ 1.3	94	179
1.10 - 1.30	8 $\pm$ 2	13.4 $\pm$ 1.2	132	299
1.15 - 1.35	7 $\pm$ 2	12.5 $\pm$ 1.3	131	255

Pour un nombre suffisant d'événements, on sait que les deux estimations donnent à peu près le même résultat. Je peux donc dire en première approximation que les différences ci-dessus proviennent uniquement des événements à faibles Δ^2 .

Alors, comme je pouvais m'y attendre, il y a peu de différences à faibles masses ($K^+\pi^-$) car la méthode de χ^2 ne fait perdre dans cette région que moins de 30 % des événements, la limite $\Delta_{\min}^2$ se trouvant près du pôle.

Par contre, pour $M_{K\pi} > 1.0$ GeV, l'extrapolation par χ^2 se fait très loin de pôle en laissant de côté plus de la moitié des événements, les différences s'accroissent.

Bien entendu les incertitudes dues aux erreurs statistiques diminuent avec le maximum de vraisemblance puisque je dispose de plus d'événements.

Les résultats ci-dessus montrent également que le développement semble valable pour des valeurs de $|\Delta^2|$ nettement supérieures à $2\mu^2$, du moins aucune discontinuité n'apparaît, comme prévu.

Pour les premiers intervalles en effet, 15 à 30 % des événements ont un transfert de moment inférieur en valeur absolue à $2\mu^2$. Ces événements ne sont pris en considération qu'avec la méthode du maximum de vraisemblance et les 2 méthodes donnent des résultats très comparables dans cette région.

IV. Influence de la forme de $\sigma_{p\pi^+}$

Je donne ici (tableau C-5) les différents résultats du programme "Extrapo - Int" avec les conditions générales suivantes :

- a) $|\Delta^2| \leq 20\mu^2$.
- b) ajustements sur les 13 intervalles de $M_{K\pi}$ précédemment considérés.
- c) ajustements linéaires.

et en prenant successivement :

- a) $\sigma_{p\pi^+} = \text{Cte}$
- b) $\sigma_{p\pi^+} = Bw(N^*)$
- c) $\sigma_{p\pi^+} = \text{Table}$

selon les conventions énoncées au chapitre C - II.

tableau C - 5

Intervalles de $M_{K\pi}$	$\sigma_{K\pi}^{+-}$ (mb) pour :		
	$\sigma_{p\pi^+} = \text{Cte}$ (a)	$\sigma_{p\pi^+} = Bw(N^{**})$ (b)	$\sigma_{p\pi^+} = \text{table}$ (c)
0.63 - 0.86	8.6 ± 0.7	7.7 ± 0.5	7.0 ± 0.5
0.80 - 0.88	30.7 ± 1.9	25.2 ± 1.2	22.7 ± 1.0
0.86 - 0.89	76.4 ± 5.4	59.9 ± 3.8	53.6 ± 3.3
0.88 - 0.90	112.2 ± 8.3	89.6 ± 6.1	79.1 ± 5.3
0.89 - 0.91	113.7 ± 8.0	91.9 ± 5.9	81.3 ± 5.1
0.90 - 0.92	99.4 ± 7.7	78.2 ± 5.4	72.7 ± 4.4
0.91 - 0.94	60.4 ± 5.4	49.0 ± 3.9	46.5 ± 3.2
0.92 - 0.98	36.0 ± 2.9	28.1 ± 2.0	25.8 ± 1.7
0.94 - 1.06	22.7 ± 1.4	16.2 ± 0.9	14.3 ± 0.8
0.98 - 1.16	15.8 ± 1.0	11.4 ± 0.6	10.0 ± 0.4
1.03 - 1.13	12.6 ± 1.3	9.7 ± 0.8	8.6 ± 0.6
1.10 - 1.30	13.4 ± 1.2	9.1 ± 0.6	7.7 ± 0.5
1.15 - 1.35	12.6 ± 1.3	8.5 ± 0.6	6.8 ± 0.5

Je constate donc que plus la forme de $\sigma_{p\pi^+}$ est proche de la forme exacte, plus la valeur de $\sigma_{K\pi}$ et les erreurs statistiques diminuent,

Si je considère (c) comme le résultat de base, je constate que (a) donne des valeurs 25 à 85 % plus élevées, et (b) 6 à 13 % seulement si $M_{K\pi} \leq 1.15$.

Ce dernier point justifie le fait qu'utiliser la fonction de Breit et Wigner ne constitue pas une mauvaise approximation. Il suffit

de multiplier les résultats par le même facteur 0.9 pour avoir le résultat à un demi-écart standard ou même mieux.

Mais ces tableaux montrent clairement une fois de plus qu'il faut être très prudent vis à vis des publications concernant l'extrapolation; avant de comparer deux résultats il faut faire attention à la manière dont ont été effectués les calculs.

V. Etude des A_1 , coefficients ultérieurs du développement

Pour effectuer l'ajustement global sur toute la bande de masse ($K\pi$), j'ai représenté A_1 , A_2 ... par des polynômes en $M_{K\pi}$.

Les résultats qui suivent montrent en effet que ces coefficients sont déterminés avec de grosses erreurs statistiques et que leur valeur varie énormément dès que l'on change un tant soit peu les conditions de l'ajustement. Je donne ici (tableau C-6) des valeurs de A_1 déterminées par "Extrapo - Int" dans les conditions suivantes :

- a) $|\Delta^2| \leq 20\mu^2$ Ajustement linéaire
- b) $|\Delta^2| \leq 12\mu^2$ Ajustement linéaire
- c) $|\Delta^2| \leq 12\mu^2$ Ajustement quadratique.

J'ai conservé dans les trois cas, les mêmes 13 intervalles. Ceci donne des incertitudes plus petites que dans le cas d'intervalles ne se recoupant pas.

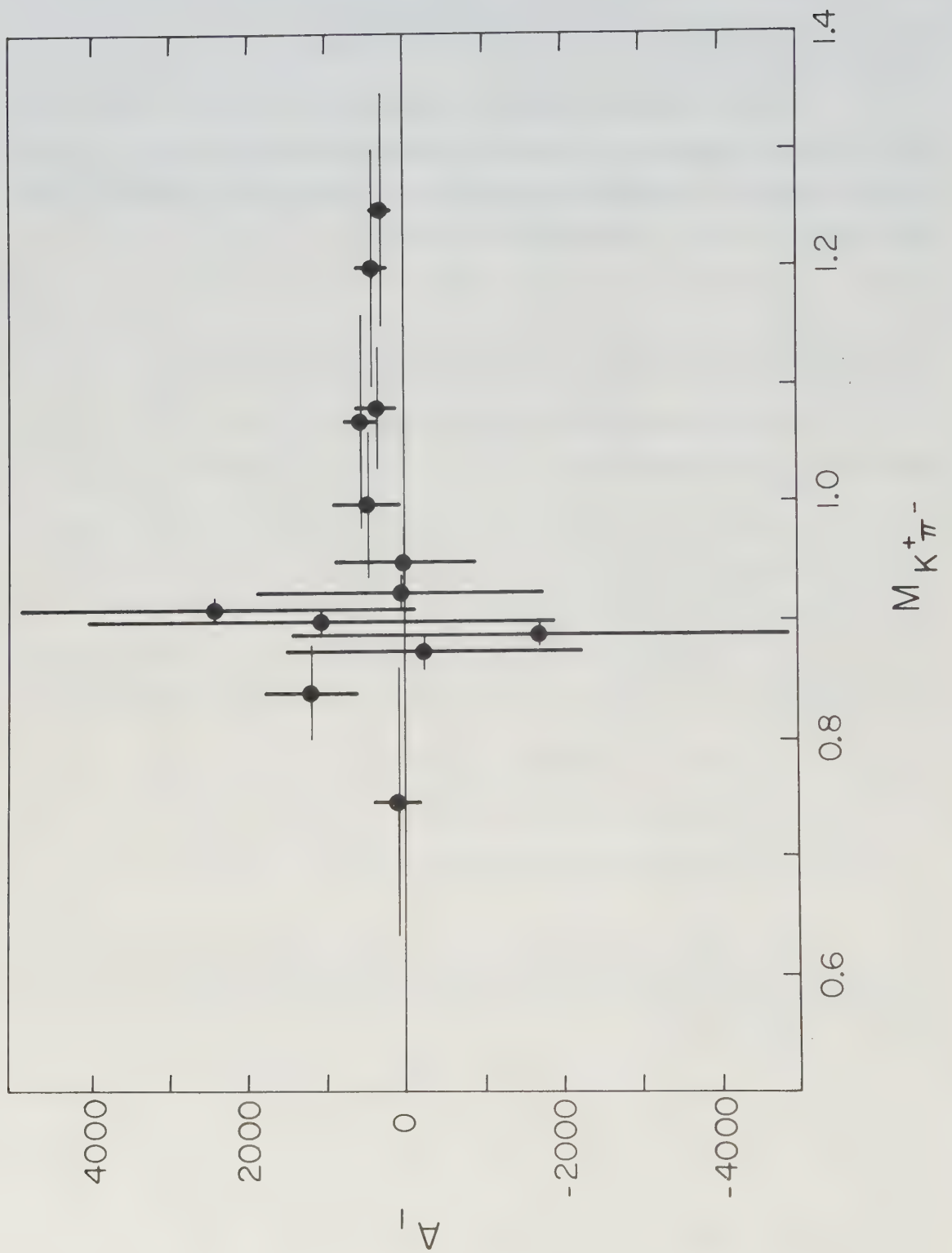


fig. C - 7

tableau C - 6

Intervalles de $M_{K\pi}$	$(A_1 \pm dA_1)$ en $\text{mb}^2 \times \text{GeV}^{-1}$		
	(a)	(b)	(c)
0.63 - 0.86	101 ± 297	-365 ± 565	-2311 ± 1700
0.80 - 0.88	1221 ± 634	2555 ± 1232	-5698 ± 4138
0.86 - 0.89	-238 ± 1966	-628 ± 3656	-29527 ± 11190
0.88 - 0.90	-1689 ± 3134	-6296 ± 5451	-33702 ± 17936
0.89 - 0.91	1070 ± 2970	-4748 ± 5274	-45209 ± 17415
0.90 - 0.92	2464 ± 2562	359 ± 4948	-29379 ± 15279
0.91 - 0.94	55 ± 1799	-1598 ± 3347	-1289 ± 10031
0.92 - 0.98	2 ± 916	-2107 ± 1796	-5571 ± 5332
0.94 - 1.06	472 ± 404	-105 ± 813	-5976 ± 2865
0.98 - 1.16	564 ± 211	716 ± 441	-6519 ± 2306
1.03 - 1.13	377 ± 280	596 ± 568	-5525 ± 2852
1.10 - 1.30	398 ± 205	739 ± 429	-5129 ± 2312
1.15 - 1.35	294 ± 120	391 ± 561	-6900 ± 2493

Le graphe de la partie (a) du tableau (C - 6) est représenté à titre d'exemple figure (C - 7).

Sans donner les résultats ici, j'ai vérifié en outre que :

- les incertitudes et les variations sont également très importantes sur A_2 et A_3 .
- si je change un peu les conditions d'ajustement, A_1 et A_2 subissent, en valeur absolue, d'importantes variations pratiquement aléatoires.

Mais il faut remarquer que si les incertitudes sur A_1 , par

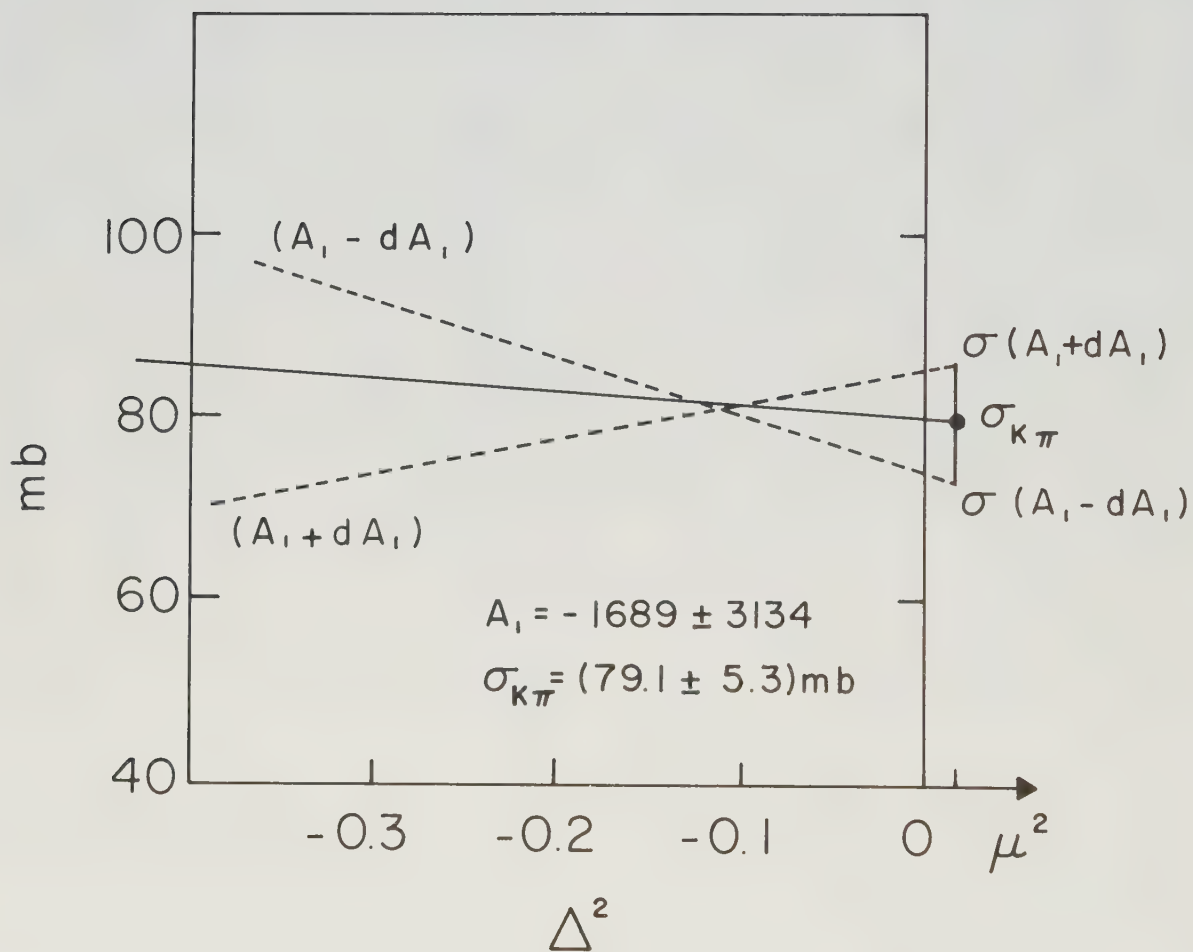


fig. C-8

exemple, peuvent paraître énormes, la "pente" A_1 est en général petite, et que, par conséquent, les incertitudes relatives sont assez faibles.

On peut remarquer également qu'il existe, sur chaque intervalle, une relation linéaire entre dA_1 et l'incertitude sur $\sigma_{K\pi}$. Dans le cas d'un ajustement linéaire, on a même $dA_1/d\sigma_{K\pi} = \text{Cte.}$

La figure (C-8), qui visualise un ajustement linéaire avec les incertitudes sur $\sigma_{K\pi}$ et A_1 , montre d'ailleurs bien qu'il ne faut pas se laisser faussement impressionner par les valeurs de dA_1 .

Finalement, le tableau (C-6) montre que A_1 dépend faiblement de $M_{K\pi}$ et qu'une paramétrisation par un polynôme en $M_{K\pi}$ de degré relativement bas doit suffire à représenter correctement cette dépendance.

Je me suis assuré de ce résultat en regardant comment variait $\sigma_{K\pi}$ dans l'ajustement global effectué par "Extrapo-Exp" pour différentes paramétrisations de A_1 .

Lorsque je fais varier de 1 à 4 le degré du polynôme en $M_{K\pi}$ représentant A_1 , le résultat sur $\sigma_{K\pi}$ varie en moyenne de 1 % dans la région du K^* et de 1 à 4 % ailleurs. Ces variations sont donc assez peu significatives par rapport aux incertitudes statistiques données par le programme.

J'ai vérifié également que A_1 ne dépendait pas de $M_{p\pi}$ dans la bande de masse du N^* , au point que diverses dépendances polynomiales de A_1 en $M_{p\pi}$ donnent des résultats identiques pour $\sigma_{K\pi}$.

Par conséquent, seul $A_0 = \sigma_{K\pi} \sigma_{p\pi}$ dépend significativement des variables $M_{K\pi}$ et $M_{p\pi}$.

Avec une paramétrisation représentée par une fonction de Breit et Wigner et un fonds relativement constant pour $\sigma_{K\pi}$, et des polynômes en $M_{K\pi}$ pour A_1 , A_2 ... je peux donc maintenant effectuer un ajustement global sur tous les événements.

VI. Influence de la limite en Δ^2

μ^2 , masse carrée du pion, désignant comme précédemment l'unité de transfert de moment, j'ai étudié l'influence de la limite en $|\Delta^2|$ sur le résultat des ajustements entre 5 et $20\mu^2$.

En dessous de $5\mu^2$, le nombre d'événements devient trop faible et les erreurs augmentent en conséquence beaucoup. Les programmes ont d'autre part plus de difficultés à converger.

D'une manière générale, je constate que les résultats sur les sections efficaces ont tendance à augmenter lorsque je diminue la limite des $|\Delta^2|$. Ceci est vrai, que j'effectue les ajustements par intervalles ou globalement. Avec "Extrapo - Int" cependant, aucune variation très nette n'apparaît dans la région du K^* .

Or pour des ajustements linéaires, le résultat est d'autant plus exact que la limite des $|\Delta^2|$ utilisée est petite. Les valeurs trouvées sont donc un peu fausses par défaut.

Je donne dans le tableau (C - 7) ci-dessous les résultats du programme "Extrapo - Int" dans les conditions suivantes :

- 13 intervalles ; ajustement linéaire ; $\sigma_{p\pi}$ = table

- a) $|\Delta^2| \leq 20\mu^2$
- b) $|\Delta^2| \leq 15\mu^2$
- c) $|\Delta^2| \leq 12\mu^2$
- d) $|\Delta^2| \leq 8\mu^2$

tableau C - 7

Intervalles de $M_{K\pi}$	(a) $ \Delta^2 \leq 20\mu^2$	(b) $ \Delta^2 \leq 15\mu^2$	(c) $ \Delta^2 \leq 12\mu^2$	(d) $ \Delta^2 \leq 8\mu^2$
0.63 - 0.86	6.9 ± 0.5	6.7 ± 0.5	6.7 ± 0.6	6.7 ± 0.9
0.80 - 0.88	22.7 ± 1.0	23.9 ± 1.1	25.5 ± 1.5	25.7 ± 2.2
0.86 - 0.89	53.6 ± 3.3	56.9 ± 3.9	56.3 ± 4.6	53.9 ± 6.1
0.88 - 0.90	79.1 ± 5.3	79.9 ± 6.1	79.0 ± 7.0	80.9 ± 9.0
0.89 - 0.91	81.3 ± 5.1	78.5 ± 6.0	78.9 ± 6.9	73.9 ± 9.0
0.90 - 0.92	72.7 ± 4.4	69.2 ± 5.5	73.9 ± 6.5	63.8 ± 8.3
0.91 - 0.94	46.5 ± 3.2	45.4 ± 3.7	47.0 ± 4.5	49.3 ± 5.4
0.92 - 0.98	25.8 ± 1.7	25.3 ± 2.0	25.1 ± 2.5	24.8 ± 3.3
0.94 - 1.06	14.3 ± 0.8	14.6 ± 0.9	15.1 ± 1.2	15.2 ± 1.7
0.98 - 1.16	10.0 ± 0.4	11.3 ± 0.6	11.3 ± 0.7	12.6 ± 1.1
1.03 - 1.13	8.6 ± 0.6	9.7 ± 0.7	9.7 ± 0.9	10.7 ± 1.3
1.10 - 1.30	7.7 ± 0.5	8.5 ± 0.5	9.3 ± 0.7	11.7 ± 1.6
1.15 - 1.35	6.8 ± 0.5	7.1 ± 0.6	8.0 ± 1.0	9.2 ± 2.6

Je donne maintenant les résultats du programme "Extrapo-Exp" dans les cas suivants :

- $\sigma_{K\pi} = \beta(\alpha Bw(K^*) + (1-\alpha) \frac{q}{M})$
- $\sigma_{p\pi} = Bw(N^*)$
- ajustement linéaire
- A_1 polynôme de degré 3 en $M_{K\pi}$
- et $|\Delta^2|$ respectivement $\leq 20, 15, 12, 8, 5 \mu^2$

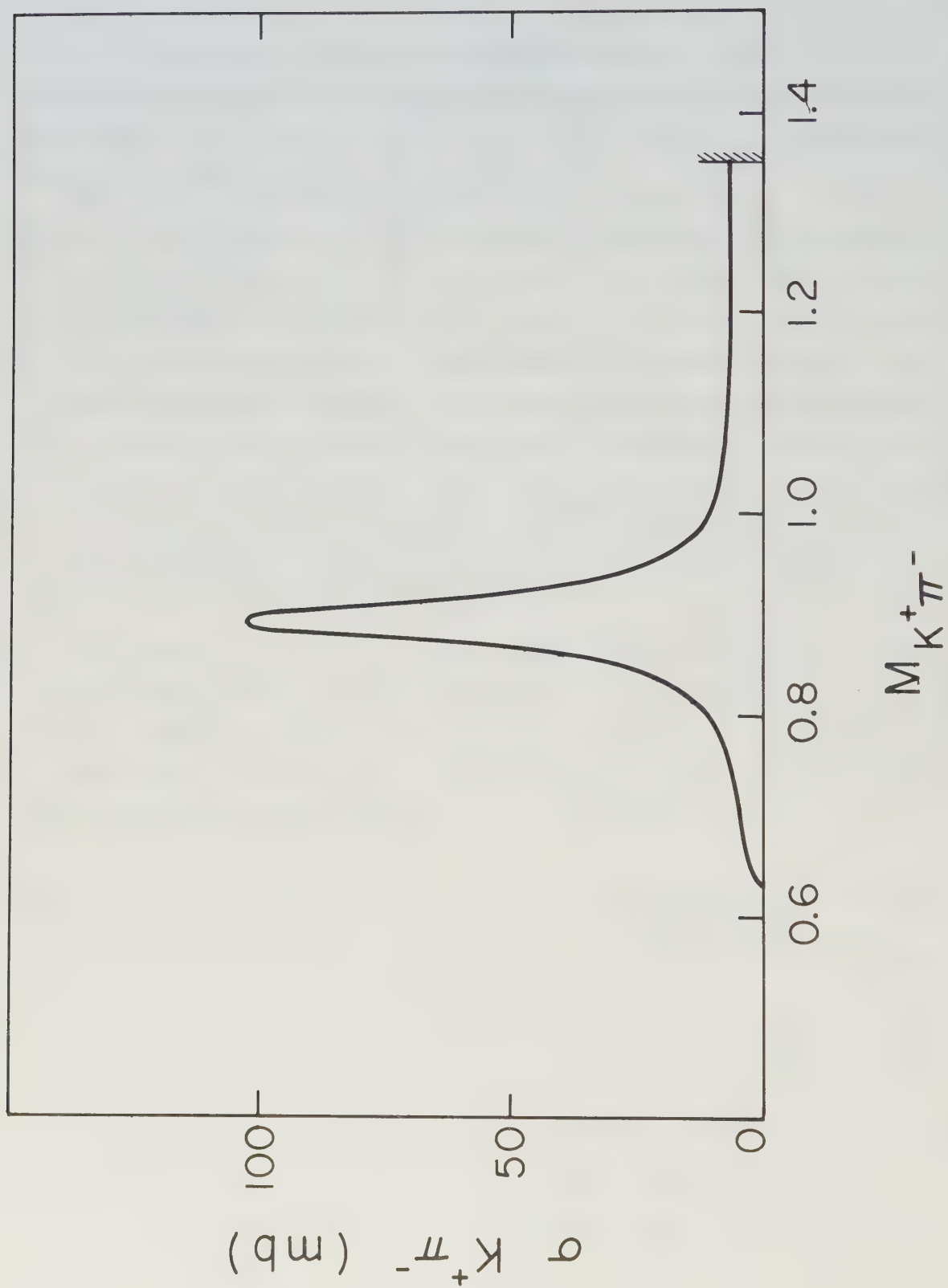


fig. C - 9

Pour cela, je résume dans le tableau (C-8) les points principaux des résultats. La figure (C-9) donne un exemple de résultat d'ajustement global; il correspond aux conditions précédentes, avec $|\Delta^2| \leq 8\mu^2$.

tableau C -8

$ \Delta^2 \leq$	Masse du K_{890}^*	Largeur du K_{890}^*	Valeur maximum de $\sigma_{K\pi}$ (mb)	Valeur du fonds en mb pour $M_{K\pi} = 1.30$ GeV
$20\mu^2$	898.6 ± 1.1	51.7 ± 3.1	94.0 ± 3.1	8.4 ± 0.6
$15\mu^2$	898.7 ± 1.1	52.1 ± 3.3	96.9 ± 3.5	8.5 ± 0.7
$12\mu^2$	898.6 ± 1.2	52.5 ± 3.6	98.8 ± 4.6	8.0 ± 1.0
$8\mu^2$	897.3 ± 1.4	52.2 ± 4.2	102.4 ± 5.0	6.6 ± 1.6
$5\mu^2$	897.0 ± 1.9	55.2 ± 6.1	100.5 ± 7.0	4.5 ± 2.7

De tous ces résultats, je déduis les conclusions suivantes :

- La valeur maximale de $\sigma_{K\pi}$, dans la région du K_{890}^* , semble avoir tendance à augmenter quand la limite en $|\Delta^2|$ diminue.

On s'en aperçoit surtout avec les résultats d'ajustements globaux, mais il suffit de changer le découpage en intervalles pour trouver la même tendance avec "Extrapo - Int".

- La valeur du fonds augmente un peu lors d'ajustements par intervalles et au contraire diminue un peu avec les ajustements globaux.

- Dans tous les cas, ces variations sont de l'ordre d'une déviation standard ou moins entre $8\mu^2$ et $20\mu^2$.

En résumé, la coupure en Δ^2 joue un rôle peu important.

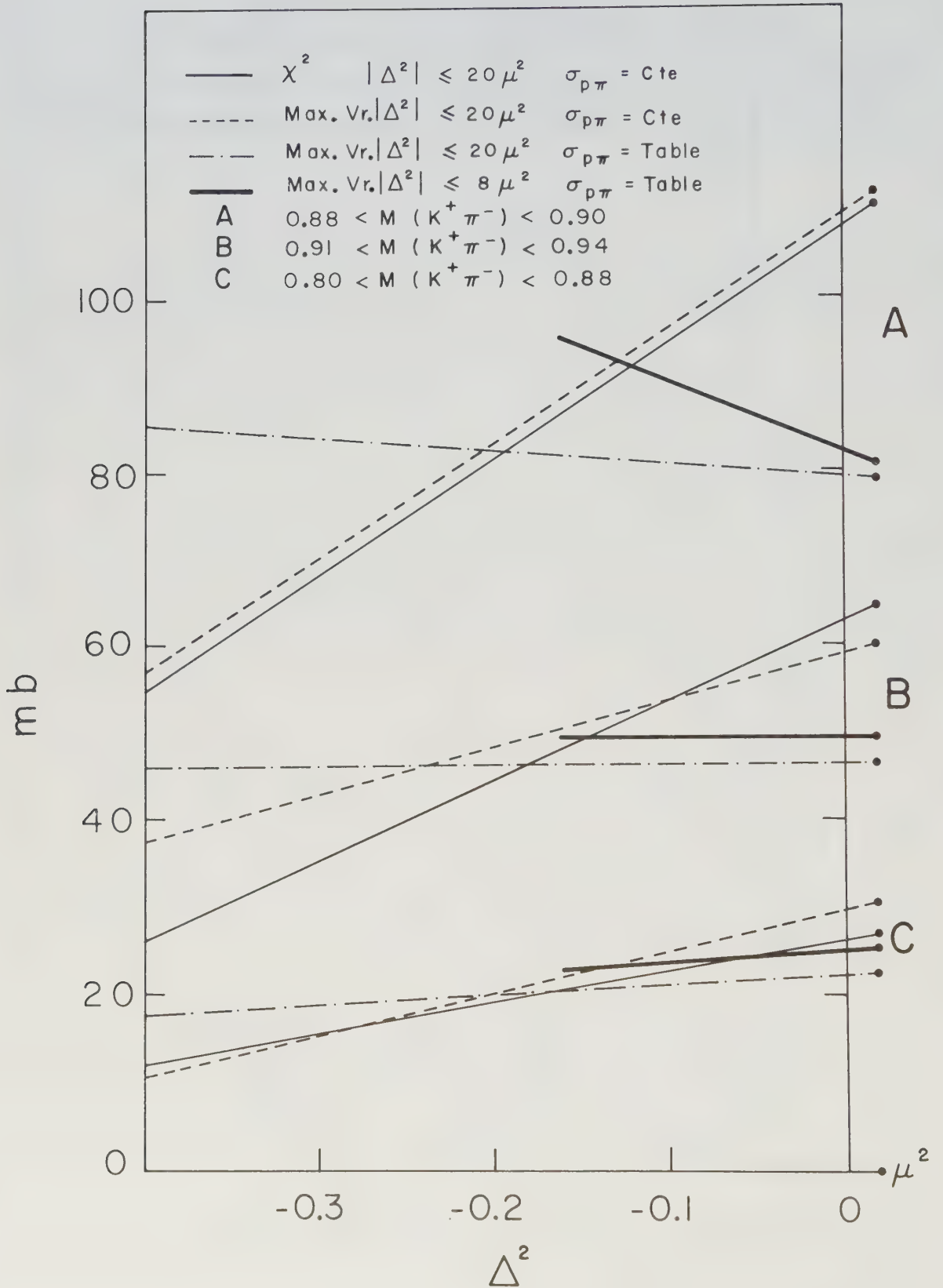


fig. C - 10

Après de nombreuses comparaisons portant sur les trois lots d'événements, j'ai pensé fixer la coupure à $12\mu^2$ dans le résultat final.

Cette valeur est bien sûr un compromis entre le nombre d'événements utiles et la possibilité d'une erreur systématique introduite par cette limite loin du pôle.

Bien entendu, avant de prendre une telle valeur, il importe d'étudier les autres facteurs influant sur le résultat, en particulier le degré du développement.

La figure (C-10) résume un peu les chapitres C-3, C-4 et C-6 en comparant 3 ajustements linéaires effectués selon 4 méthodes différentes : seule la forme donnée à $\sigma_{p\pi}$ influe beaucoup sur le résultat.

VII. Influence du degré du développement en $(\Delta^2 - \mu^2)$

Pour étudier l'influence du degré du développement, j'ai comparé les différents ajustements suivants :

"Extrapo - Int"

- Ajustements linéaire et quadratique - $|\Delta^2| \lesssim 20\mu^2 - \sigma_{p\pi} = \text{Cte}$
- Ajustements du 1^{er} au 4^e degré - $\sigma_{p\pi} = \text{Table}$
 $|\Delta^2| \lesssim 20, 15, 12 \text{ et } 8 \mu^2$ respectivement. Ceci permet d'étudier l'influence du degré du développement suivant la coupure en Δ^2 .

"Extrapo - Exp"

- Ajustements linéaire et quadratique.

De façon générale, le degré du développement en $(\Delta^2 - \mu^2)$ influe assez peu sur le résultat.

Le tableau (C - 9) montre qu'un ajustement quadratique augmente le résultat lorsque je prends $\sigma_{p\pi} = \text{Cte}$. Cependant les erreurs sont telles que les résultats demeurent compatibles, excepté pour les masses ($K\pi$) élevées où l'extrapolation se fait loin du pôle.

tableau C - 9

"Extrapo-Int"	$ \Delta^2 \leq 20\mu^2$ $\sigma_{p\pi} = \text{Cte}$	
Intervall de $M_{K\pi}$	1 ^{er} degré	2 ^e degré
0.63 - 0.86	8.6 ± 0.7	6.4 ± 1.7
0.80 - 0.88	30.7 ± 1.9	34.9 ± 5.4
0.86 - 0.89	76.4 ± 5.4	80.9 ± 14.6
0.88 - 0.90	112.2 ± 8.3	126.7 ± 23.0
0.89 - 0.91	113.7 ± 8.0	132.6 ± 23.7
0.90 - 0.92	99.4 ± 7.8	92.2 ± 22.6
0.91 - 0.94	60.4 ± 5.4	70.2 ± 15.1
0.92 - 0.98	36.0 ± 2.9	40.3 ± 8.5
0.94 - 1.06	22.7 ± 1.4	30.0 ± 5.1
0.98 - 1.16	15.9 ± 1.0	30.5 ± 3.9
1.03 - 1.13	12.6 ± 1.3	30.5 ± 5.2
1.10 - 1.30	13.4 ± 1.2	27.7 ± 5.1
1.15 - 1.35	12.5 ± 1.3	22.6 ± 5.9

Par contre, j'observe une diminution du résultat en prenant $\sigma_{p\pi} = \text{table}$, comme le montre d'ailleurs le tableau (C - 10).

Sur ce tableau je remarque également que les différences ne sont sensibles qu'entre le premier et le second degré. Au delà, les résultats varient très peu.

Mais dans tous les cas, je n'observe de variations que dans la région du K^* . Pour le fonds, il n'y a pratiquement aucune différence.

Egalement, les incertitudes augmentent peu avec le degré, à la différence du tableau (C-9).

tableau C - 10

"Extrapo-Int"	$ \Delta^2 \leq 20\mu^2$ $\sigma_{p\pi} = \text{table}$			
Intervalles de $M_{K\pi}$	1 ^{er} degré	2 ^e degré	3 ^e degré	4 ^e degré
0.63 - 0.86	6.9 ± 0.4	5.9 ± 0.7	5.8 ± 0.8	5.7 ± 0.8
0.80 - 0.88	22.7 ± 1.0	20.8 ± 1.8	19.3 ± 2.0	18.2 ± 2.0
0.86 - 0.89	53.6 ± 3.3	44.3 ± 5.0	41.2 ± 5.3	40.0 ± 5.3
0.88 - 0.90	79.1 ± 5.3	66.5 ± 7.3	62.7 ± 8.4	61.1 ± 8.4
0.89 - 0.91	81.3 ± 5.1	68.6 ± 7.0	63.5 ± 7.8	61.9 ± 8.0
0.90 - 0.92	72.7 ± 4.4	61.8 ± 6.3	60.5 ± 6.9	60.3 ± 7.0
0.91 - 0.94	46.5 ± 3.2	42.5 ± 4.3	41.5 ± 4.8	41.6 ± 4.9
0.92 - 0.98	25.8 ± 1.7	22.2 ± 2.3	20.8 ± 2.5	20.8 ± 2.5
0.94 - 1.06	14.3 ± 0.8	11.8 ± 1.2	10.8 ± 1.3	10.4 ± 1.3
0.98 - 1.16	10.0 ± 0.4	9.3 ± 0.7	8.2 ± 0.8	7.8 ± 0.8
1.03 - 1.13	8.6 ± 0.6	8.5 ± 0.8	7.6 ± 0.9	7.3 ± 1.0
1.10 - 1.30	7.7 ± 0.5	7.0 ± 0.7	6.3 ± 0.7	6.1 ± 0.7
1.15 - 1.35	6.8 ± 0.5	5.7 ± 0.7	5.3 ± 0.7	5.5 ± 0.7

Si je diminue la limite en $|\Delta^2|$, j'observe que les variations diminuent. Ceci est normal puisque l'ajustement se fait alors sur un intervalle plus petit de Δ^2 et dans ce cas une droite est déjà une bonne approximation.

A titre d'exemple, je donne ci-dessous dans le tableau (C-11) l'équivalent du tableau (C-10) mais avec $|\Delta^2| \leq 8\mu^2$. Aux limites de 12 et 15 μ^2 , j'observe des résultats tout à fait analogues; pour 12 μ^2 en particulier, les variations ne sont pas plus élevées que pour 8 μ^2 .

Un autre moyen possible pour juger de l'influence du degré du développement est de comparer les valeurs optimisées de la fonction de vraisemblance.

Soient en effet deux hypothèses A et B, c'est-à-dire deux paramétrisations, telles que $A \subset B$ (B se déduit de A par addition de paramètres supplémentaires) et soit r le nombre de paramètres indépendants qu'il faut ainsi annuler dans l'hypothèse B pour obtenir l'hypothèse A.

Intuitivement, le maximum de vraisemblance sera d'autant plus élevé dans B que les r paramètres supplémentaires sont significatifs.

Plus exactement (Réf. C-3), si L et L' sont les logarithmes des fonctions de vraisemblance optimisées pour les hypothèses A et B, la quantité

$$D = 2 (L' - L)$$

suit une loi de χ^2 à r degrés de liberté.

tableau C - 11

"Extrapo-Int"	$ \Delta^2 \leq 8\mu^2$ $\sigma_{p\pi} = \text{table}$			
Intervalles de $M_{K\pi}$	1 ^{er} degré	2 ^e degré	3 ^e degré	4 ^e degré
0.63 - 0.86	6.7 ± 0.9	6.4 ± 1.0	6.5 ± 1.0	6.9 ± 1.0
0.80 - 0.88	25.7 ± 2.2	22.5 ± 2.7	22.6 ± 2.7	22.7 ± 2.7
0.86 - 0.89	53.8 ± 6.1	46.7 ± 6.8	45.3 ± 7.0	45.8 ± 7.0
0.88 - 0.90	80.9 ± 9.0	75.4 ± 10.7	75.1 ± 11.1	75.9 ± 11.2
0.89 - 0.91	73.9 ± 9.0	68.5 ± 11.0	69.1 ± 11.1	69.2 ± 11.1
0.90 - 0.92	63.8 ± 8.3	65.2 ± 9.8	66.5 ± 9.7	66.6 ± 9.8
0.91 - 0.94	49.3 ± 5.4	47.0 ± 6.5	48.7 ± 6.6	49.8 ± 6.6
0.92 - 0.98	24.8 ± 3.3	23.7 ± 3.6	25.4 ± 3.7	24.8 ± 3.7
0.94 - 1.06	15.2 ± 1.7	14.0 ± 1.9	14.0 ± 1.9	14.0 ± 1.9
0.98 - 1.16	12.6 ± 1.1	11.3 ± 1.4	11.9 ± 1.4	11.9 ± 1.4
1.03 - 1.13	10.7 ± 1.3	9.1 ± 1.6	10.9 ± 1.5	10.8 ± 1.7
1.10 - 1.30	11.7 ± 1.6	12.1 ± 1.7	12.1 ± 1.9	11.4 ± 1.8
1.15 - 1.35	9.2 ± 2.6	9.2 ± 2.6	9.5 ± 2.6	9.4 ± 2.8

Les valeurs de L et de D correspondant au tableau (C - 11) sont données dans le tableau (C - 12).

Les valeurs moyennes de D sont 1.91, 3.72 et 5.72 pour respectivement $r = 1$, 2 et 3 paramètres.

Ceci correspond à des probabilités de 16.7, 15.7 et 12.2 %. L'ajustement linéaire est donc tout à fait justifié dans ces conditions.

tableau C - 12

No de l'intervalle	1 ^{er} degré	2 ^e degré	3 ^e degré	4 ^e degré
	L	D = 2(L' - L)		
1	1239.74	0.3	2.2	9.4
2	1809.66	4.8	5.8	6.2
3	1872.39	7.3	8.3	8.9
4	1983.32	1.0	1.0	2.1
5	1981.65	0.8	1.0	1.0
6	1660.55	0.1	1.6	1.7
7	1515.66	0.5	2.0	4.6
8	1611.03	0.9	3.1	5.0
9	1602.87	3.3	3.4	3.4
10	1384.56	2.9	7.4	7.5
11	623.42	2.3	12.1	18.2
12	685.69	0.4	0.4	7.1
13	385.28	0.0	0.1	0.2

En ce qui concerne "Extrapo - Exp" je trouve que des ajustements linéaires et quadratiques conduisent à des résultats encore moins différents que précédemment.

Entre autres ajustements, je donne pour comparaison (tableau C-13) les résultats résumés correspondant aux conditions suivantes :

- Ajustement linéaire, $|\Delta^2| \leq 12\mu^2$, A_1 du 5^e degré en $M_{K\pi}$
- Ajustement quadratique, $|\Delta^2| \leq 12\mu^2$, A_1 et A_2 du 5^e degré en $M_{K\pi}$

avec $\sigma_{K\pi} = \beta(\alpha Bw(K^*) \frac{q^3}{M^3} + (1 - \alpha) \frac{q}{M})$, $\sigma_{p\pi} = \text{table}$

tableau C - 13

Ajustement	$M(K^*)$	$\Gamma(K^*)$	Valeur maximale de $\sigma_{K\pi}$ (mb)	Valeur de $\sigma_{K\pi}$ pour $M = 1.20$ (mb)
Linéaire	894.9 ± 1.2	54.0 ± 3.8	91.1 ± 4.3	7.4 ± 0.7
Quadratique	894.7 ± 1.3	54.0 ± 4.1	89.8 ± 4.3	5.7 ± 0.8

En résumé, à condition de ne pas prendre une limite en Δ^2 trop élevée, il suffit d'effectuer un ajustement linéaire; $12\mu^2$ semble une limite raisonnable : les valeurs extrapolées et leurs incertitudes restent les mêmes, quel que soit le degré.

Je note également que le degré du développement et la limite en Δ^2 ont des influences opposées. Les résultats ont une faible tendance à augmenter quand la limite en Δ^2 diminue et une faible tendance à diminuer quand le degré augmente.

Ainsi, j'obtiens quasiment les mêmes résultats avec un ajustement linéaire à $20\mu^2$ et un ajustement du 4^e degré à $5\mu^2$.

Dans tout le domaine étudié des paramètres, les variations restent dans l'ensemble inférieures à une déviation standard.

Remarque

Si j'avais été obligé pour obtenir un résultat "correct" d'aller jusqu'au 3^e ou 4^e degré, il aurait été préférable d'opérer différemment.

Au lieu d'un développement en $(\Delta^2 - \mu^2)$, j'aurais utilisé une autre variable t , choisie de la façon suivante : par une transformation conforme dans le plan complexe Δ^2 , cf. figure (A-3), j'aurais transformé la coupure $\Delta^2 \geq 4\mu^2$ en un cercle de rayon aussi élevé que possible, les événements réels étant rassemblés près du centre.

Un tel changement de variable permettrait alors de se limiter à un ajustement linéaire (Ref. C-4).

Je n'ai pas vérifié cette idée, mais il faut remarquer que la quantité d'information est au départ la même dans les deux cas.

Le résultat et l'incertitude peuvent différer si le fait de négliger les termes de degré supérieur à 4 dans un cas est un plus mauvais traitement que négliger les termes de degré supérieur à 1 dans l'autre cas, mais quant au fonds, la méthode ne peut rien apporter de plus.

VIII. $\phi(\Delta^2)$ ou $\phi(\mu^2)$

Jusqu'à présent, j'ai toujours considéré dans la formule d'extrapolation que les moments du proton et du K^+ , dans les systèmes $(p\pi^+)$ et $(K^+\pi^-)$ respectivement, étaient pris en dehors de la couche de masse, au point physique $\Delta^2 < 0$: $\phi(\Delta^2) \sim q_{K\pi}^{\text{off}} q_{p\pi}^{\text{off}}$.

Ceci était dû à l'influence du modèle d'échange d'un pion (OPE), car on sait, qu'un tel échange est largement prédominant dans la réaction étudiée $K^+\pi^- \rightarrow N^{*++}$.

En fait, la théorie du Chew et Low, à son origine et dans sa forme la plus pure, c'est-à-dire indépendante de toute approximation ou modèle supplémentaire, nous dit que ces moments doivent être pris au pôle, $\Delta^2 = \mu^2$, autrement dit, sur la couche de masse du pion échangé.

La fonction ϕ de la formule d'extrapolation devrait être alors $\phi(\mu^2)$ et non $\phi(\Delta^2)$.

Il est donc intéressant de voir si ces deux formulations sont à peu près compatibles, ou si au contraire elles conduisent à des résultats complètement différents; et dans cette dernière hypothèse, que faut-il choisir?

Je peux alors faire deux remarques :

1. Quelle que soit la valeur de Δ^2 , on a $\phi(\Delta^2) > \phi(\mu^2)$. La fonction ϕ intervenant au dénominateur de la formule d'extrapolation, cela implique que pour des conditions analogues d'ajustement, je dois trouver des résultats supérieurs avec $\phi(\mu^2)$.

2. On peut développer la fonction ϕ au voisinage du pôle et écrire :

$$\phi(\Delta^2) = \phi(\mu^2) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\Delta^2 - \mu^2)^n \right]$$

Ceci revient à considérer $\phi(\Delta^2) / \phi(\mu^2)$ comme un terme correctif, un facteur de forme et suggère qu'utiliser $\phi(\Delta^2)$ permet de se limiter à un ajustement linéaire par exemple tandis que $\phi(\mu^2)$ donnerait le même résultat avec un ajustement de degré plus élevé seulement.

Une telle supposition paraît en fait hasardeuse car, quel que soit l'intervalle de masse ($K\pi$), $\phi(\Delta^2) / \phi(\mu^2)$ est environ égal à deux, en moyenne. D'un autre côté, l'étude des résultats en fonction du degré du développement a montré que ce facteur influait peu. Il faut donc plutôt s'attendre à des résultats deux fois plus élevés en moyenne.

C'est ainsi que j'ai utilisé les deux programmes "Extrapo-Int" et "Extrapo-Exp" avec $\phi(\mu^2)$ dans les conditions suivantes :

- Ajustements par intervalles du 1^{er} au 6^{ème} degré en $(\Delta^2 - \mu^2)$,
- Ajustements globaux linéaires,

avec les événements des 3 expériences utilisées et les conditions communes : $\sigma_{p\pi} = \text{table}$, $|\Delta^2| \leq 12\mu^2$.

Les principaux résultats sont résumés dans les tableaux C-14 , C-15 et C-16.

Le tableau (C -14) permet de comparer les deux expériences à 5.0 et 5.5 GeV/c dans des ajustements linéaires. Les colonnes de droite donnent les rapports des résultats à ceux obtenus dans les mêmes conditions avec $\phi(\Delta^2)$.

Le tableau (C -15) donne à 5.0 GeV/c différents résultats d' "Extrapo - Int" selon le degré de l'ajustement.

Le tableau (C -16) enfin, résume les résultats d "Extrapo-Exp" à 5.0 GeV/c dans un ajustement linéaire en comparant avec ceux obtenus dans l'autre formulation :

tableau C - 14

Int. No.	Intervalle de $M_{K\pi}$	Ajustements linéaires $\sigma_{K\pi}(\text{mb})$		$\sigma_{K\pi}(\phi(\mu^2))/\sigma_{K\pi}(\phi(\Delta^2))$	
		5.0 GeV/c	5.5 GeV/c	5.0 GeV/c	5.5 GeV/c
1	.633 - .800	4.9 ± 2.0	9.4 ± 1.6	2.07	2.65
2	.800 - .860	43.4 ± 4.2	38.2 ± 4.1	2.25	2.04
3	.860 - .880	101.4 ± 12.7	139.6 ± 13.3	2.16	2.05
4	.880 - .890	155.1 ± 27.4	245.9 ± 23.6	2.05	2.08
5	.890 - .900	176.3 ± 25.2	195.2 ± 25.3	2.14	1.97
6	.900 - .910	158.3 ± 26.3	209.2 ± 24.9	2.09	2.00
7	.910 - .930	117.5 ± 14.4	137.4 ± 13.1	2.15	2.05
8	.930 - .960	52.7 ± 9.5	74.9 ± 6.9	2.08	2.11
9	.960 - 1.020	34.7 ± 4.2	40.4 ± 3.5	2.23	2.14
10	1.020 - 1.100	24.9 ± 2.8	25.8 ± 2.6	2.31	2.19
11	1.100 - 1.200	24.9 ± 2.3	20.0 ± 2.2	2.41	2.28
12	1.200 - 1.350	16.6 ± 3.4	19.9 ± 2.6	2.38	2.34

tableau C -15

Intervalle No.	2 ^e degré	3 ^e degré	4 ^e degré	5 ^e degré
1	5.1 ± 2.5	4.8 ± 2.6	5.1 ± 2.6	5.3 ± 2.7
2	47.4 ± 5.3	50.6 ± 5.7	49.9 ± 5.8	49.9 ± 5.9
3	89.8 ± 15.1	89.1 ± 15.1	88.0 ± 15.1	87.1 ± 15.3
4	162.1 ± 30.9	172.1 ± 32.7	165.9 ± 33.7	162.0 ± 34.5
5	185.7 ± 31.0	181.2 ± 32.4	181.2 ± 32.6	176.4 ± 32.0
6	148.2 ± 29.6	164.0 ± 28.9	169.6 ± 28.6	173.8 ± 30.5
7	119.4 ± 16.8	127.3 ± 17.8	127.4 ± 17.6	127.3 ± 17.5
8	61.7 ± 9.6	61.4 ± 9.9	68.3 ± 10.4	67.6 ± 10.8
9	36.5 ± 4.9	36.3 ± 5.0	36.4 ± 5.0	36.5 ± 4.9
10	20.6 ± 3.2	21.0 ± 3.3	24.0 ± 3.3	24.0 ± 3.3
11	21.4 ± 3.3	21.2 ± 3.3	21.9 ± 3.2	24.0 ± 3.2
12	13.1 ± 3.6	13.4 ± 3.7	13.9 ± 3.7	13.7 ± 3.9

tableau C -16

Ajustement linéaire 5.0 GeV/c	M(K [*])	Γ(K [*])	Valeur maximale de σ _{Kπ} (mb)	Valeur de σ _{Kπ} pour M = 1.20 (mb)
φ(μ ²)	894.4 ± 1.2	52.0 ± 3.8	221.0 ± 11.0	17.3 ± 1.9
φ(Δ ²)	894.8 ± 1.2	54.0 ± 3.8	91.0 ± 4.3	7.5 ± 0.7

Ces résultats confirment les remarques et suppositions faites précédemment :

1) $\phi(\mu^2)$ ne change pas du tout la forme de la courbe $\sigma_{K\pi}$, ce qui légitimise l'emploi de la paramétrisation de "Extrapo - Exp". En particulier, la masse et la largeur du K^* restent les mêmes.

2) Comme prévu, $\phi(\mu^2)$ donne des résultats complètement différents de $\phi(\Delta^2)$ pour des conditions analogues d'ajustement : en moyenne, les sections efficaces sont 2.2 fois plus élevées.

3) Enfin, le degré du développement influe peu sur les résultats et il est donc impossible de concilier les deux formulations.

En pratique, j'avais deux raisons de choisir alors $\phi(\Delta^2)$ plutôt que $\phi(\mu^2)$:

1) Chaque fois que l'échange d'un π a des raisons d'être dominant, les prédictions du modèle périphérique O.P.E., éventuellement modifié par l'absorption s'avèrent en excellent accord avec les résultats expérimentaux (Réf. C-5).

2) Les résultats, donnés par $\phi(\Delta^2)$ sont les seuls que puissent s'accorder avec la limite d'unitarité donnée par la théorie de la diffusion (cf. chapitre C-X).

Ces deux constatations expliquent pourquoi jusqu'ici, et dans la suite de ce travail, j'ai utilisé $\phi(\Delta^2)$ et non $\phi(\mu^2)$.

Il resterait bien sûr à expliquer cette incompatibilité entre les résultats déduits des deux formulations.

IX. Résultats finals

Après toute cette étude concernant la variation des résultats en fonction d'un certain nombre de paramètres et de conditions, il peut apparaître difficile de donner les bonnes valeurs de $\sigma_{K\pi}$.

Aussi, si je choisis comme conditions :

- 1) Ajustement linéaire
- 2) $\phi(\Delta^2)$
- 3) $\sigma_{p\pi} = \text{table}$
- 4) $|\Delta^2| \leq 12\mu^2$

les résultats ne peuvent être considérés que moyennant les restrictions qu'imposent ces conditions. En particulier, les incertitudes ne tiennent pas compte des biais qu'elles peuvent introduire.

D'autre part, j'ai toujours pris pour la section efficace 4 corps σ_T les valeurs expérimentales. La discussion concernant ces valeurs sera faite au chapitre suivant; et dans les résultats qui suivent il n'est pas tenu compte des incertitudes sur σ_T , qu'il faudrait en fait ajouter quadratiquement aux incertitudes sur $\sigma_{K\pi}$ (pour les paramètres du K^* , cela ne change rien).

Ayant ainsi bien défini la signification à donner aux paramètres ajustés et aux incertitudes, passons aux résultats obtenus dans les trois expériences :

- "Extrapo - Int" Ajustements sur 12 et 24 intervalles disjoints,
- "Fit 2 bod" Ajustement de la paramétrisation expérimentale :

$$\sigma_{K\pi} = \beta(\alpha Bw(K^*) \frac{q^3}{M^3} + (1 - \alpha) \frac{q}{M}) \text{ sur les 12 ou 24 points précédents,}$$

- "Extrapo - Exp" Ajustement global de la paramétrisation précédente (A_1 du 4^e degré).

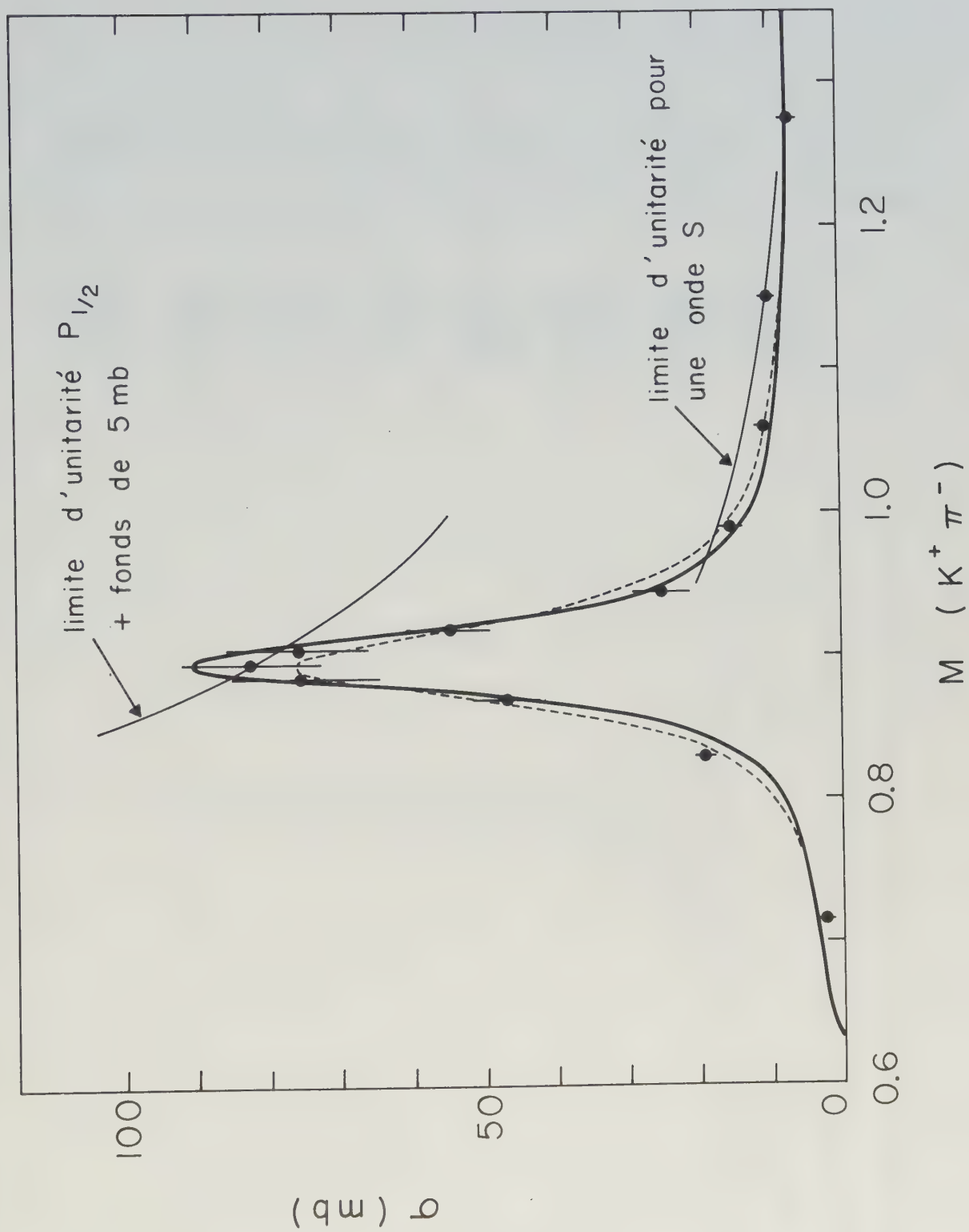


fig. C - II

FIT NO 4 RESULTS VALUES & ILLUSTRATIONS

LIKELIHOOD = 0.040,4133264

COEFFICIENTS FITTED = 0.0107477E+01 4.3947726E-02 6.7072350E+01 9.2707414E+01 9.7453735E+05 +2.3393432E+06 3.5038400E+06
-0.2201361E+06 7.5173030E+05

DERIVEDS FROM FITS = 0.0647751E+10 1.4531452E-09 -4.0930949E+10 1.2330672E+12 +3.1377231E+13 -2.0521345E+13 -1.2246356E+13
+6.6466521E+14

DERIVEDS SECONDARY = -1.2120450E+06 -2.7473106E+05 -5.5012757E+03 -3.2061964E+00 +4.2030611E+05 -1.9112626E+05 -7.4907819E+06
-1.0107591E+06

ERREURS STATISTIQUES = 0.1277311E+04 2.7677372E-03 2.4361895E-02 1.0326477E+00 1.5053135E+05 6.2274917E+05 9.5094072E+05
6.3601954E+05

MATRICE DIERPHE

= 0.457075E+07 1.409374E+07 2.754916E-07 -3.677936E+06 -1.782033E+01 7.325232E+01 -1.105913E+02 7.270395E+01
1.471374E+07 -4.509411E+06 +3.29012E-05 -1.901870E+04 1.318126E+01 -1.337050E+01 +2.302719E+01 4.851634E+01
0.754916E-07 -7.20-012E-05 -5.035017E-04 1.129177E+02 4.511317E+02 -1.355953E+03 1.847039E+03 +9.583126E+02
-3.577936E+06 -1.201870E+04 1.120177E+02 +1.066346E+00 3.036978E+03 7.300610E+02 -2.129194E+04 2.628608E+04
-1.782033E+01 1.318126E+01 4.511317E+02 3.036978E+03 -2.269067E+10 9.352138E+10 -1.421984E+11 0.433941E+10
7.325232E+01 -1.337050E+01 +2.302719E+01 4.851634E+01 -3.577936E+06 -1.201870E+04 1.120177E+02 +1.066346E+00
-1.173706E+01 -1.737060E+01 +1.956768E+03 3.036978E+03 7.359139E+10 -3.473155E+11 5.911925E+11 +3.934894E+11
-1.173706E+01 -7.367716E+11 1.097039E+03 -2.129194E+04 -1.421984E+11 5.911925E+11 -9.042883E+11 0.038570E+11
-3.577936E+06 4.951634E+01 +0.583126E+02 2.628608E+04 7.437091E+10 +3.34894E+11 6.038570E+11 -4.045209E+11

PLOT DU FIT DIERPHE

1
F(x) = 1/2
SIGMA 0.01774
(ILLUSTRATIONS)

.63 .5127 .1433 X
.64 1.3079 .1171 XX
.65 1.9161 .1575 XX
.66 2.3537 .1799 XX
.67 2.6910 .21-3 XXX
.68 3.33 .23 7 XXX
.69 3.36 0 .2470 XXX
.7 3.6051 .2533 XXXX
.71 4.155 .2743 XXXX
.72 4.36 6 .2741 XXXX
.73 4.73 8 .2717 XXXX
.74 5.1300 .2773 XXXXX
.75 5.641 .28 12 XXXXX
.76 6.1302 .28 70 XXXXXX
.77 6.7030 .28 60 XXXXXX
.78 7.2702 .3113 XXXXXXX
.79 7.579 .3271 XXXXXXXX
.8 7.9161 .3473 XXXXXXXXX
.81 11.7157 .4315 XXXXXXXXXX
.82 14.2405 .5550 XXXXXXXXXXXX
.83 17.0978 .5517 XXXXXXXXXXXXXX
.84 23.6274 1.1773 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
.85 26.6642 1.5675 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
.86 47.4730 1.2232 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
.87 71.115 2.7786 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
.88 101.041 3.7646 XX
.89 117.2633 4.2724 XX
.9 102.7771 3.5071 XX
.91 75.9227 2.3371 XX
.92 54.64 2.3 55 XX
.93 48.6162 1.7 67 XX
.94 31.5057 1.4070 XX
.95 26.65 1 1.3742 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
.96 21.7807 .3773 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
.97 10.7103 .3174 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
.98 16.6232 .4 50 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
.99 15. 509 .7143 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 13.3484 .4770 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 1 12.0061 .4 3 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 2 12.1061 .4477 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 3 11.58 4 .4178 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 4 11. 852 .4136 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 5 10.6457 .4458 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 6 10.7070 .4432 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 7 10. 159 .4548 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 8 9.7710 .4521 XXXXXXXXXXXXXXXX
1. 9 9.5632 .4595 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.1 9.3042 .4770 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.11 9.2005 .4744 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.12 9. 054 .4710 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.13 9.0704 .4735 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.14 9.0766 .5 71 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.15 9.7871 .7115 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.16 9.7004 .7176 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.17 9.6701 .7274 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.18 9.7778 .7371 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.19 9.5237 .7143 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.2 9.4707 .7373 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.21 9.4331 .7412 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.22 9.3952 .7479 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.23 9.3617 .7512 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.24 9.3319 .7575 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.25 9.3051 .7615 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.26 9.2817 .7674 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.27 9.26 7 .7632 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.28 9.2422 .7777 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.29 9.2257 .7742 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.3 9.2117 .7705 XXXXXXXXXXXXXXXX
1.31 9. 373 .7727 XXXXXXXXXXXXXXXX

SIGMA(M(X*)) = 116.9778 +- 4.2814

Les tableaux (C-17) , (C-18) et (C-19) résument tous ces résultats. La figure (C-11) visualise ceux de l'expérience à 5.0 GeV/c. Sur cette figure, la courbe en trait plein est le résultat d'"Extrapo-Exp"; la courbe en pointille est donnée par "Fit 2 bod" après un ajustement sur les 12 points obtenus par "Extrapo-Int". La figure (C-12) est la photo de la sortie d' "Extrapo-Exp" à 5.5 GeV/c.

Dans le tableau (C-19), α donne le pourcentage de K^* par rapport au fonds sur tout l'intervalle 0.6334 - 1.35 de masse ($K\pi$). Il est bien évident que sous le pic, le rapport résonance / fonds est bien plus élevé.

tableau C-17

Intervalle No.	Intervalle de $M_{K\pi}$	5.0 GeV/c (1558 événements)	5.5 GeV/c (2566 événements)	9.0 GeV/c (545 événements)
1	0.63 - 0.80	2.4 ± 0.6	3.5 ± 0.4	3.7 ± 0.9
2	0.80 - 0.86	19.3 ± 1.3	18.7 ± 1.5	14.2 ± 3.2
3	0.86 - 0.88	46.9 ± 4.5	68.3 ± 5.0	33.2 ± 8.7
4	0.88 - 0.89	75.7 ± 10.3	118.5 ± 8.4	93.5 ± 13.3
5	0.89 - 0.90	82.3 ± 9.6	99.2 ± 9.8	122.7 ± 11.1
6	0.90 - 0.91	75.8 ± 10.1	104.7 ± 9.7	77.6 ± 13.0
7	0.91 - 0.93	54.8 ± 5.5	67.0 ± 5.0	29.3 ± 8.0
8	0.93 - 0.96	25.3 ± 3.8	35.5 ± 2.6	22.5 ± 4.4
9	0.96 - 1.02	15.6 ± 1.7	18.9 ± 1.4	18.0 ± 2.4
10	1.02 - 1.10	10.8 ± 1.1	11.8 ± 1.1	9.3 ± 1.7
11	1.10 - 1.20	10.3 ± 0.9	8.8 ± 0.9	6.2 ± 1.5
12	1.20 - 1.35	7.0 ± 1.2	8.5 ± 1.0	5.4 ± 1.1

tableau C - 18

Intervalle No.	Intervalle de $M_{K\pi}$	5.0 GeV/c	5.5 GeV/c
1	0.63 - 0.76	1.4 ± 0.6	2.9 ± 0.3
2	0.76 - 0.80	5.4 ± 1.4	5.5 ± 1.1
3	0.80 - 0.84	13.2 ± 1.2	14.1 ± 1.6
4	0.84 - 0.86	32.0 ± 3.1	28.5 ± 3.0
5	0.86 - 0.87	38.5 ± 5.2	47.0 ± 6.6
6	0.87 - 0.88	55.4 ± 7.5	89.7 ± 7.4
7	0.880- 0.885	73.9 ± 14.3	95.7 ± 11.3
8	0.885- 0.890	79.3 ± 15.4	152.5 ± 14.9
9	0.890- 0.895	102.9 ± 11.9	108.4 ± 13.4
10	0.895- 0.900	55.3 ± 15.6	91.4 ± 14.7
11	0.900- 0.905	81.4 ± 14.4	128.8 ± 13.6
12	0.905- 0.910	70.2 ± 14.2	83.0 ± 13.7
13	0.91 - 0.92	71.6 ± 8.0	75.1 ± 7.4
14	0.92 - 0.93	37.1 ± 7.4	58.7 ± 6.9
15	0.93 - 0.94	32.3 ± 7.7	48.5 ± 4.2
16	0.94 - 0.96	21.6 ± 4.1	28.6 ± 3.3
17	0.96 - 0.98	18.7 ± 3.0	22.6 ± 3.1
18	0.98 - 1.02	14.1 ± 2.0	16.9 ± 1.5
19	1.02 - 1.06	10.4 ± 1.7	14.2 ± 1.2
20	1.06 - 1.10	11.1 ± 1.4	9.3 ± 1.8
21	1.10 - 1.14	9.7 ± 1.5	8.4 ± 1.4
22	1.14 - 1.20	11.7 ± 1.0	9.4 ± 1.2
23	1.20 - 1.26	7.5 ± 1.7	8.8 ± 1.3
24	1.26 - 1.35	6.4 ± 1.8	8.2 ± 1.5

tableau C - 19

Intervalle No.	Intervalle de $M_{K\pi}$	5.0 GeV/c (1558 événements)	5.5 GeV/c (2566 événements)	9.0 GeV/c (545 événements)
Résultats de "Fit 2 bod" pour 12 points	$M(K^*)$ $\Gamma(K^*)$ $\sigma_{\max}(K\pi)$ σ pour $M_{K\pi}=1.25$ χ^2 par degré de liberté	891.0 ± 1.9 70.5 ± 6.0 75.5 7.7 1.10	891.6 ± 1.2 59.0 ± 3.3 110.7 8.0 0.48	892.7 ± 1.8 37.0 ± 5.0 106.0 7.1 1.23
Résultats de "Fit 2 bod" pour 24 points	$M(K^*)$ $\Gamma(K^*)$ $\sigma_{\max}(K\pi)$ σ pour $M_{K\pi}=1.25$ χ^2 par degré de liberté	891.8 ± 1.7 60.7 ± 4.8 81.7 8.2 1.02	892.9 ± 1.1 54.5 ± 3.0 116.2 8.1 0.78	
Résultats de "Extrapo- Exp"	$M(K^*)$ $\Gamma(K^*)$ $\sigma_{\max}(K\pi)$ σ pour $M_{K\pi}=1.25$ α	894.85 ± 1.2 54.0 ± 3.8 91.0 ± 4.3 7.5 ± 0.7 $(65.4 \pm 3.5)\%$	893.8 ± 0.9 49.9 ± 2.6 117.3 ± 4.3 8.3 ± 0.6 $(67.1 \pm 2.4)\%$	893.0 ± 2.5 54.0 ± 7.6 75.5 ± 7.0 6.5 ± 0.9 $(64.2 \pm 5.5)\%$

Ainsi que je l'avais déjà mentionné, les résultats des deux programmes ne diffèrent essentiellement que par la largeur du K^* et par voie de conséquence, par la valeur maximale de $\sigma_{K\pi}$. Il est bien évident que pour ces valeurs, "Extrapo - Exp" est plus correct à priori, et à posteriori également, d'après les valeurs de Γ obtenues.

Ceci est corroboré par les résultats de "Fit 2 bod" dans lequel les valeurs du χ^2 par degré de liberté sont assez proches de 1 ou inférieures à 1 ; cela montre en effet que la paramétrisation utilisée n'est pas mauvaise.

Pour revenir à "Extrapo - Exp", les masses et largeurs du K^* données par les 3 lots d'événements sont très proches des valeurs données par les tables de Rosenfeld.

On peut par exemple comparer ces dernières valeurs (en MeV) :

$$M = 894.7 \pm 0.9 \qquad \Gamma = 49.7 \pm 1.1$$

avec la moyenne pondérée des valeurs obtenues :

$$M = 894.0 \pm 0.7 \qquad \Gamma = 52.0 \pm 2.1$$

Mais il faut noter que les valeurs des tables sont généralement le fruit d'une compilation de résultats "off-shell".

Or on sait qu'une compilation analogue donne une largeur trop élevée pour le ρ , alors que Baton (réf. 0-2), dans une étude comparable à celle-ci sur la diffusion $\pi^-\pi^0$, donne une largeur plus faible, compatible avec le résultat trouvé dans l'expérience de formation $e^+e^- \rightarrow \rho$ (tableau C-20).

tableau C - 20

	$\Gamma(\rho)$ MeV
Tables de Rosenfeld (ρ^-)	145 ± 5
Extrapolation de Chew et Low (Baton)	110 ± 9
photo production	93 ± 15

Pour le K^* apparemment il n'existe pas un tel effet, mais s'il y avait désaccord, c'est la valeur que je viens de déterminer qu'il faudrait croire, et non le contraire.

Par ailleurs, on peut remarquer que d'une expérience à l'autre, la valeur maximale de $\sigma_{K\pi}$ varie sensiblement par rapport aux incertitudes obtenues. Mais si j'ajoute une incertitude de 10 % sur chacune des valeurs de σ_T , ce qui correspond à peu près à la réalité, les résultats deviennent :

tableau C - 21

	5.0 GeV/c	5.5 GeV/c	9.0 GeV/c
$\sigma_{\max}$ (mb)	(91.0 ± 10.1)	(117.3 ± 12.5)	(75.5 ± 10.3)

Cela conduit déjà à des valeurs beaucoup plus compatibles.

Je vais d'ailleurs discuter de ces problèmes de compatibilité dans le chapitre suivant.

X. Section efficace 4 corps et la limite d'unitarité

Dans les ajustements globaux précédents, je n'ai utilisé qu'une seule paramétrisation de $\sigma_{K\pi}$, celle d' "Extrapo - Exp" , dans laquelle en particulier, la valeur maximale de $\sigma_{K\pi}$ n'est pas imposée.

Ceci est en désaccord avec la théorie de la diffusion qui prévoit des valeurs déterminées pour les sections efficaces d'ondes résonantes.

Il est peut-être alors utile de voir si les résultats sont compatibles avec cette contrainte supplémentaire, la limite d'unitarité.

Le programme "Extrapo - TH" me permet de faire cette étude.

Je donne ci-dessous les calculs qui me conduisent à cette nouvelle paramétrisation de $\sigma_{K\pi}$.

On verra ensuite les problèmes que celle-ci soulève.

Paramétrisation "théorique"

Si je suppose que le processus $K^+\pi^- \rightarrow K^+\pi^-$ fait intervenir les ondes partielles s , p , d ... , il m'est possible de calculer une paramétrisation exacte de $\sigma_{K\pi}$ à partir du développement en ondes partielles de l'amplitude de ce processus :

$$A_{K^+\pi^-}(s, \cos \theta) = \frac{1}{q} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_{\ell}(q) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$(K^+\pi^-)$ n'est pas un état propre d'isospin :

$$f_{\ell}(K^+\pi^- \rightarrow K^+\pi^-) = \frac{2}{3} f_{\ell,1/2} + \frac{1}{3} f_{\ell,3/2} .$$

La matrice S réduite est reliée à l'amplitude partielle $f_{\ell,I}$ par :

$$f_{\ell,I} = \frac{1}{2i} (S_{\ell,I}(q) - 1) .$$

Si je suppose que la seule onde résonnante pour $M = M_{K^+\pi^-} < 1.2$ GeV est $P_{1/2}$ et si je tiens compte en outre du fait que la matrice S est unitaire, on a :

$$S_{1,1/2} = \frac{(M-M_0)-i\Gamma/2}{(M-M_0)+i\Gamma/2} \quad \text{d'où} \quad f_{1,1/2} = -\frac{\Gamma/2}{(M-M_0)+i\Gamma/2} .$$

J'exprime toutes les autres amplitudes partielles en utilisant la formule de portée effective :

$$q^{2\ell+1} \cotg \delta_{\ell,I} = -\frac{1}{a_{\ell,I}} + \frac{1}{2} \rho_{\ell,I} q^2 \quad \text{où} \quad S_{\ell,I} = e^{2i\delta_{\ell,I}}$$

d'où

$$f_{\ell,I} = \frac{q^{2\ell+1}}{\left(-\frac{1}{a_{\ell,I}} + \frac{1}{2} \rho_{\ell,I} q^2 \right) - iq^{2\ell+1}} .$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} \sigma_{K\pi} &= \int |A(s, \cos\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{q} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |f_{\ell}(q)|^2 \\ &= \frac{16\pi}{3q^2} |f_{1,1/2}|^2 + R \end{aligned}$$

où R désigne une série entière convergente en q .

Ayant observé que le fonds R était à peu près constant pour $M \geq 1.0$ GeV, et la variable q/M , fonction biunivoque de q , tendant vers 0.5 à haute énergie, j'ai décidé de remplacer cette série en q par une série en q/M .

J'ai pensé qu'ainsi il suffirait de se limiter à un plus petit nombre de termes (deux, par exemple).

D'autre part, la résonance K^* n'étant pas très éloignée du seuil, j'ai pris :

$$\Gamma = \gamma \left(\frac{q}{M} \right)^{2\ell+1} = \gamma \left(\frac{q}{M} \right)^3 \quad \text{avec} \quad \Gamma_K^* = \Gamma(M = M_0)$$

ceci pour satisfaire à la condition de seuil :

$$f_\ell \sim q^{2\ell+1} \quad \text{quand} \quad q \rightarrow 0.$$

Finalement, j'ai la paramétrisation :

$$\sigma_{K\pi} = \frac{A}{q^2} \frac{\Gamma^2/4}{(M-M_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} + P_n \left(\frac{q}{M} \right) = A \frac{\gamma^2 q^4/4M^6}{(M-M_0)^2 + \gamma^2 q^6/4M^6} + P_n \left(\frac{q}{M} \right)$$

avec $A = 0.389 \frac{16\pi}{3}$ si σ est en millibarns et les autres variables en GeV,

et P_n = polynôme de degré n en $\frac{q}{M}$.

Les termes ultérieurs A_i du développement sont paramétrisés par des polynômes en M , comme dans "Extrapo - Exp".

La constante A impose à $\sigma_{K\pi}$ de ne pas dépasser la limite d'unitarité pour une onde $P_{1/2}$ (76 millibarns environ dans la région du K_{890}^*).

J'ai écrit ce programme avec les possibilités suivantes :

- je peux effectuer des ajustements linéaires ou quadratiques en $(\Delta^2 - \mu^2)$, avec P_n , A_1 et A_2 de degré quelconque.
- je peux laisser libre la section efficace 4 corps, σ_T , et optimiser sa valeur, compte tenu des contraintes de la paramétrisation (limite d'unitarité essentiellement).
- je peux au contraire imposer une valeur fixe à cette section efficace.

Passons maintenant aux résultats :

Résultats

1) Avant toute autre chose, je dois faire remarquer que diverses comparaisons m'ont montré que le premier degré en q/M pour $\sigma_{K\pi}$ était suffisant et qu'utiliser le second, le 3^e ou le 4^e degré ne changeait rien au résultat.

Dans tout ce qui suit, je supposerai donc implicitement que $\sigma_{K\pi}$ est linéaire en q/M , excepté en 2).

Egalement, comme dans "Extrapo - Exp", les degrés en M de A_1 et A_2 influent très peu sur les résultats.

Finalement la seule différence entre les deux paramétrisations globales concerne la limite d'unitarité.

2) J'ai commencé par essayer un ajustement linéaire en fixant la section efficace 4 corps σ_T . Je n'ai jamais réussi à faire converger correctement le programme, malgré un certain nombre de précautions :

un des problèmes de la méthode du maximum de vraisemblance consiste en effet à donner des valeurs de départ à tous les coefficients que l'on cherche à ajuster.

Si celles-ci sont par trop éloignées des valeurs optimales, le programme ne parvient pas à converger. C'est ce qui arrive souvent lorsqu'on ne possède aucune idée a priori sur la valeur des coefficients, et c'est un peu mon cas ici.

Pour résoudre le problème, je suis parti des résultats d' "Extrapo - Exp", j'ai retranché de la courbe $\sigma_{K\pi}$ obtenue la contribution d'une Breit et Wigner de hauteur donnée par la limite d'unitarité, pour ne garder que le fonds. J'ai écrit alors un petit programme pour ajuster un polynôme en q/M sur la courbe en M représentant ce fonds et j'ai mis les coefficients ainsi déterminés comme valeurs de départ dans "Extrapo - TH".

En ce qui concerne A_1 j'ai essayé différents degrés de polynômes en prenant comme valeurs de départ celles données par "Extrapo - Exp".

Malgré ces précautions, je ne suis parvenu à aucun résultat avec les événements à 5.0 et à 5.5 GeV/c. A 9.0 GeV/c, le programme réussit à converger.

Pour avoir une idée plus précise du problème, il faut remarquer qu'à 5.0 GeV/c, par exemple, $\sigma_{K\pi}$ culmine à 91 millibarns environ, d'après les résultats d' "Extrapo - Exp". Or la limite

d'unitarité impose une valeur d'environ 76 millibarns. Compte tenu du fonds moyen sous le K^* , "Extrapo - TH" impose finalement à $\sigma_{K\pi}$ de culminer à 81 millibarns. Comme ce programme ne converge pas, cela veut tout simplement dire que la paramétrisation utilisée ne permet pas d'expliquer cette différence de 10 millibarns avec un ajustement linéaire, encore moins la différence de 37 millibarns à 5.5 GeV/c. A 9.0 GeV/c par contre, la différence n'est que de 5 millibarns et il est normal que le programme converge.

3) Avant de vouloir condamner la méthode de Chew et Low, on peut essayer de chercher des explications qui permettent de concilier les résultats des deux paramétrisations globales.

J'ai pensé à deux possibilités :

- Les valeurs expérimentales de la section efficace 4 corps σ_T sont inexactes. Le résultat est en effet exactement proportionnel à cette valeur. A 5.0 GeV/c, par exemple, il suffirait que σ_T soit égal à 1.60 - 1.65 millibarns au lieu de la valeur expérimentale (1.80 ± 0.15) pour que les résultats soient en complet accord. Ceci n'est pas déraisonnable.

- On peut essayer également un ajustement de degré supérieur à 1, quadratique par exemple, c'est-à-dire forcer le résultat en prenant suffisamment de paramètres.

Ce deuxième point est discutable; avec un nombre suffisant de paramètres, on peut ajuster n'importe quoi, ou presque. D'autre part les résultats d'ajustements quadratiques dans "Extrapo - Exp" semblent condamner la validité de tels procédés.

Une combinaison de ces deux possibilités me semble cependant raisonnable et me permettrait sans doute de concilier les résultats de toutes les énergies avec la condition d'unitarité.

En pratique, j'ai commencé par laisser complètement libre la section efficace σ_T . Le programme n'a alors aucune peine à converger et donne la valeur de σ_T la plus probable et son incertitude, compte tenu de la paramétrisation employée.

J'ai essayé ainsi des ajustements linéaires et quadratiques, avec A_1 et A_2 de degrés variables. Les résultats sont vraiment tous à peu près les mêmes, quelles que soient les conditions.

La figure (C -13) donne une superposition des résultats à 5.0 et à 5.5 GeV/c dans des conditions identiques. La masse et la largeur du K^* restent les mêmes que dans "Extrapo - Exp" à de très minimes différences près.

Le tableau (C -22) résume les résultats obtenus en ce qui concerne σ_T . La quantité λ indique en outre de combien la valeur de $\sigma_{\max}(K\pi)$ dans "Extrapo-Exp" s'écarte de la limite d'unitarité :

$$\lambda = 100 \frac{\sigma_{\max}(K\pi) - \text{fonds} - \sigma_{TH}}{\sigma_{TH}}$$

où σ_{TH} désigne la limite d'unitarité et "fonds" est obtenu par interpolation à partir des ailes de la Breit et Wigner. L'incertitude sur λ est essentiellement due à l'incertitude expérimentale sur σ_T (j'ai pris 10 % pour chacune des expériences).

tableau C - 22

σ_T (mb) expérience	Valeur expérimentale	Ajustement	$(\lambda \pm d\lambda)$
5.0	1.80 ± 0.15	1.60 ± 0.08	$(11 \pm 13) \%$
5.5	1.83 ± 0.20	1.26 ± 0.05	$(43 \pm 16) \%$
9.0	$1.16 \pm ?$	1.24 ± 0.15	$-(9 \pm 13) \%$

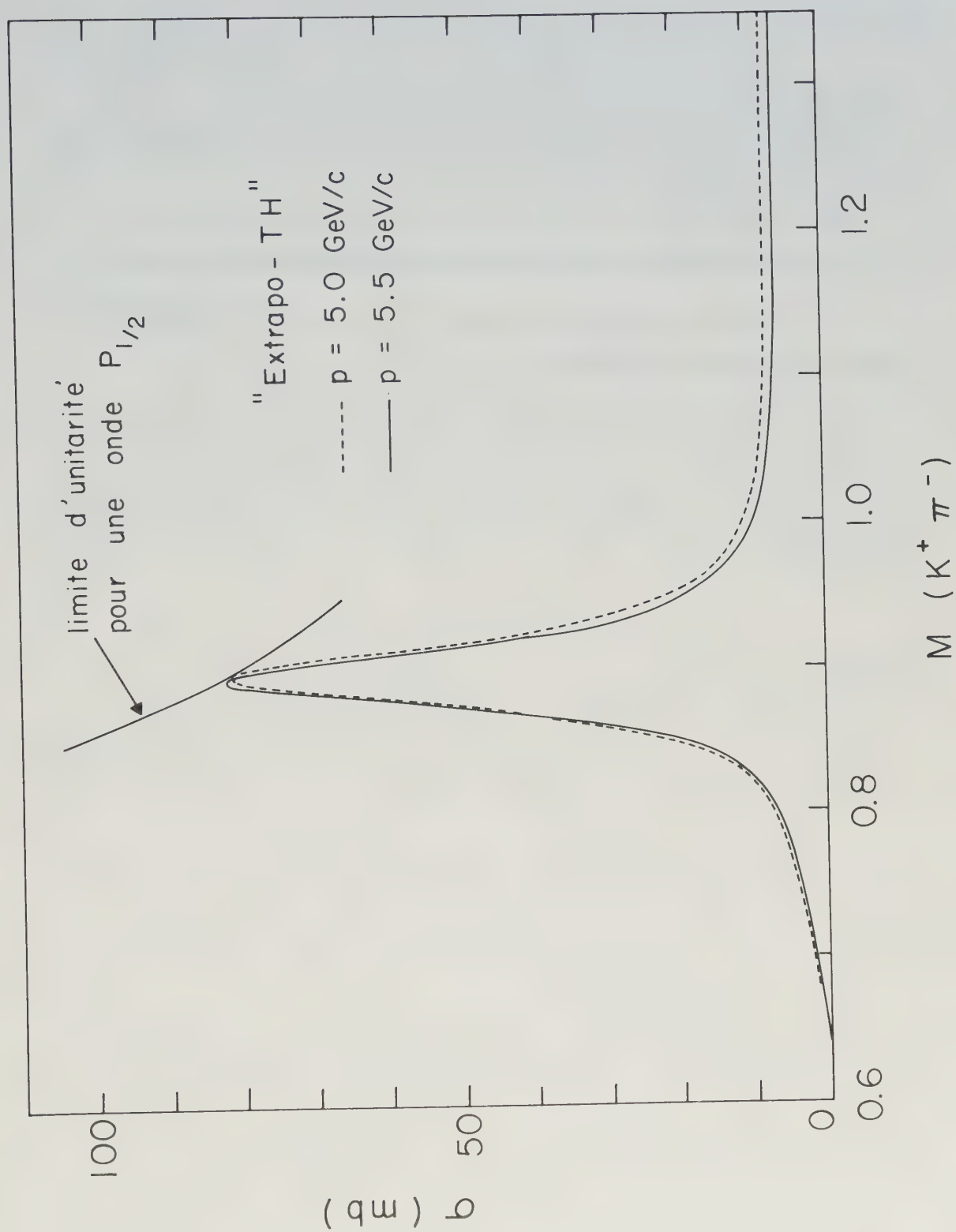


fig. C - 13

Il apparaît clairement sur ce tableau que les expériences à 5.0 et 9.0 GeV/c donnent des résultats en accord avec la limite d'unitarité moyennant des valeurs de σ_T tout à fait compatibles avec les valeurs expérimentales.

A 5.5 GeV/c, l'accord est franchement mauvais.

J'ai alors essayé de fixer σ_T à sa valeur expérimentale avec un ajustement quadratique.

Pour cela, je suis parti des résultats précédents en variant pas à pas σ_T . Les valeurs des coefficients (dans A_1 et A_2 principalement) ne changent ainsi pas trop et le programme a convergé à chaque pas.

J'ai obtenu ainsi des ajustements corrects avec les expériences à 5.0 et 9.0 GeV/c. A 5.5 GeV/c, bien que le programme ait normalement convergé avec $\sigma_T = 1.83$ millibarns, il est difficile d'admettre que la méthode de Chew et Low et la théorie de la diffusion s'accordent parfaitement avec cette valeur.

Mais je remarque que σ_T en fonction du moment du K^+ incident est une fonction décroissante à partir de 3 GeV/c environ (figure C-5). σ_T devrait donc être moins élevée à 5.5 GeV/c qu'à 5.0 GeV/c, et non le contraire.

Si je prends comme valeur de σ_T aux trois énergies étudiées, respectivement 1.65, 1.55 et 1.20 millibarns, comme le montre la courbe tracée à la main sur la figure (C-5), alors un ajustement quadratique à 5.5 GeV/c ou tout simplement linéaire, aux autres énergies, donne

dans ces conditions des résultats tout à fait en accord avec la limite d'unitarité^(*).

Il serait sûrement possible de mieux concilier encore les résultats grâce à des coupures mieux choisies sur les événements.

D'après la théorie de Chew et Low les résultats en sont indépendants, mais pratiquement le traitement statistique fait qu'ils en dépendent un peu.

Par exemple, avec les coupures employées, il y a un certain nombre d'événements où le π^+ du N^* interfère avec l'autre vertex pour donner en $K\pi\pi$ toute la région du "Q-bump". Une coupure en masse effective ($K\pi\pi$) ou sur l'angle du π^+ dans le centre de masse du système global donnerait sûrement des lots d'événements meilleurs en qualité. On pourrait faire de même avec le π^- , qui interfère un peu avec le N^* .

En conclusion, les résultats trouvés à différentes énergies ne sont pas du tout incompatibles à mon avis avec la théorie de la diffusion, mais il reste quelques problèmes.

(*) Une nouvelle valeur de σ_T à 5.5 GeV/c, moins élevée, a d'ailleurs été tout récemment publiée (voir à ce sujet l'appendice B-II).

XI. La section efficace ($K^+\pi^-$) au seuil

Avant de conclure cette étude, je voudrais comparer la valeur expérimentale de ($K^+\pi^-$) au seuil, soit σ_0 , trouvée par la méthode de Chew et Low avec les prévisions de l'algèbre des courants (PCAC) et du modèle de Vénéziano.

Il est bien évident qu'expérimentalement σ_0 ne peut être déterminée à partir des paramétrisations globales utilisées précédemment. Les biais qu'elles introduisent, faibles dans la région du K^* et aux environs, peuvent être importants au seuil ou du moins, trop grands pour la précision ici demandée.

"Extrapo - TH", par exemple, m'a toujours donné des résultats dans lesquels σ_0 était légèrement négative ($\sigma_0 \approx -1$ mb), quoique compatible avec 0 le plus souvent.

Je n'ai donc considéré que les événements relativement proches du seuil :

$$M_{K\pi} \lesssim 0.780 \text{ GeV}$$

et j'ai essayé plusieurs ajustements par intervalles, bien que les incertitudes deviennent alors importantes. J'ai également ajusté une droite et une parabole sur ces événements.

J'ai comparé les résultats des 3 lots d'événements.

Les valeurs au seuil ainsi déterminées sont toutes comprises entre -1 et +1 millibarn, souvent inférieures à 0.5 et de toutes façons compatibles avec 0 .

A titre d'exemple, en ajustant à une droite les événements de $M_{K\pi} < 0.72 \text{ GeV}$, je trouve : $\sigma_0 = (-1.0 \pm 1.0) \text{ mb}$ à 5.0 GeV/c. Si je

prends la droite joignant les 2 ajustements sur les intervalles $M_{K\pi} < 0.72 \text{ GeV}$ et $0.72 \text{ GeV} < M_{K\pi} < 0.78 \text{ GeV}$ à $5.5 \text{ GeV}/c$, je trouve

$$\sigma_0 = (0.29 \pm 0.45) \text{ mb.}$$

D'après la forme de la formule d'extrapolation, $\phi(\Delta^2)$ étant différent de 0 pour $M_{K\pi}$ minimum, de tels résultats signifient simplement que la densité d'événements tend vers 0 lorsque $M_{K\pi}$ tend vers sa valeur minimale.

Je considère donc que la valeur au seuil de la section efficace élastique $K^+ \pi^- \rightarrow K^+ \pi^-$ est inférieure à 0.5 mb :

$$\sigma_0 = (0.0 + 0.5) \text{ mb} . \quad (30)$$

σ_0 est reliée aux deux longueurs de diffusion dans l'onde s par :

$$\sigma_0 = \frac{40\pi}{9} (2 a_{1/2} + a_{3/2})^2$$

a en fermis , σ_0 en millibarns.

On utilise souvent plutôt les longueurs a^+ et a^- en séparant l'amplitude de diffusion A en ses parties paire et impaire A^+ et A^- plutôt qu'en projetant sur l'espace d'isospin, $A_{1/2}$ et $A_{3/2}$.

$$A(s,t,u) = \delta_{\alpha\beta} A^+(s,t,u) + \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] A^-(s,t,u)$$

où α et β sont les indices d'isospin du pion initial et final, soit : $\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 + \pi_2)$ etc. τ_α , τ_β désignent les matrices de Pauli, et par définition :

$$A^\pm = A(s,t) \pm A(u,t).$$

Cette utilisation provient des relations de croisement, qui s'écrivent alors très simplement :

$$A^{\pm}(s,u) = A^{\pm}(u,s) .$$

On en déduit :

$$A^{3/2} = \langle K^+_{\pi^+} | A | K^+_{\pi^+} \rangle = A^+ - A^-$$

$$A^{1/2} = \frac{1}{3} \left[\langle K^0_{\pi^0} | -\sqrt{2} \langle K^+_{\pi^-} | \right] A \left[| K^0_{\pi^0} \rangle - \sqrt{2} | K^+_{\pi^-} \rangle \right] = A^+ + 2A^-$$

et donc les mêmes relations, pour les longueurs de diffusion associées:

$$\begin{cases} a_{3/2} = a^+ - a^- \\ a_{1/2} = a^+ + 2a^- \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a^+ = 1/3 (a_{1/2} + 2a_{3/2}) \\ a^- = 1/3 (a_{1/2} - a_{3/2}) \end{cases}$$

soit :

$$\sigma_0 = 40\pi (a^+ + a^-)^2 .$$

Généralement, les longueurs de diffusion sont données en unités m_{π}^{-1} . Il suffit alors de multiplier ces valeurs par 1.4 pour avoir σ_0 en millibarns.

Les relations de commutation entre courants et l'hypothèse du courant vecteur axial partiellement conservé (PCAC) permettent le calcul des éléments de matrice S de l'émission et de l'absorption de n'importe quel nombre de pions mous, d'où l'on déduit la longueur de diffusion d'un pion sur n'importe quelle autre particule.

Les calculs peuvent être trouvés par exemple dans la référence (C-6). Cependant, selon les auteurs, les approximations de calculs ne sont pas toujours les mêmes et les longueurs de diffusion obtenues varient un peu d'une publication à l'autre. Un point commun cependant, est la relation $a_{1/2} = -2a_{3/2}$ c'est-à-dire $a^+ = 0$.

Dans la référence (C-6) donc, les calculs donnent :

$$a_T = -L \frac{T(T+1) - T_K(T_K+1) - 2}{(1 + \frac{m_\pi}{m_K})}$$

avec : T_K = isospin du K , T = isospin total.

L est une longueur donnée par la relation de Goldberger et Treiman,

et dont la valeur est 0.11 m_π^{-1} .

d'où $a_{1/2} = 0.172 \text{ m}_\pi^{-1}$ $a_{3/2} = -0.086 \text{ m}_\pi^{-1}$ et $\sigma_0 = 1.8 \text{ mb}$.

Dans la référence (C-7), on obtient :

$$a_{1/2} = \frac{1}{2\pi} f^2 \frac{1}{(1 + \frac{m_\pi}{m_K})} \quad a_{3/2} = -\frac{1}{2} a_{1/2}$$

avec $f = (1.03 \pm 0.05)$

d'où $a_{1/2} = (0.132 \pm 0.013) \text{ m}_\pi^{-1}$ $a_{3/2} = -(0.066 \pm 0.007) \text{ m}_\pi^{-1}$

et $\sigma_0 = (1.1 \pm 0.2) \text{ mb}$.

Dans la référence (C-8), qui ajoute une correction "on-shell" à la longueur de diffusion a^- par rapport aux calculs de la référence (C-6), on obtient

$$a^+ = 0 \quad a^- = 0.12 \text{ m}_\pi^{-1}$$

d'où $\sigma_0 = 3.5 \text{ mb}$.

L'algèbre des courants, avec l'hypothèse PCAC, prévoit donc une valeur de σ_0 comprise entre 1 et 3.5 millibarns.

De son côté, le modèle de Vénéziano permet de donner une expression analytique aux amplitudes A^+ et A^- de la diffusion ($K\pi$).

D'après la référence (C-9), ces amplitudes sont obtenues à partir des trajectoires du ρ et du K_{890}^{**} (toutes deux dégénérées d'échange, l'une avec le f , l'autre avec le K_{1400}^{**}) par :

$$A^{\pm}(s,t,u) = -\frac{1}{2} f^2 \left\{ F(\alpha_K^{**}(s), \alpha_{\rho}(t)) \pm F(\alpha_K^{**}(u), \alpha_{\rho}(t)) \right\}$$

Les pentes des trajectoires sont, comme d'habitude supposées égales à 0.89 GeV^{-2} :

$$\begin{cases} \alpha_K^{**}(s) = 0.89 s + 0.28 \\ \alpha_{\rho}(t) = 0.89 t + 0.48 \end{cases}$$

de plus on a : $f^2/4\pi = 1.7$ (valeur obtenue en comparant l'algèbre des courants et la normalisation au pôle du ρ)

$$\text{et : } F(x, y) = \frac{\Gamma(1-x) \cdot \Gamma(1-y)}{\Gamma(1-x-y)}$$

$$\text{On en déduit } a^{+} = 0.015 \text{ m}_{\pi}^{-1} \quad a^{-} = 0.093 \text{ m}_{\pi}^{-1}$$

$$\text{d'où } \sigma_0 = 2.9 \text{ mb.}$$

Dans la référence (C-10), il est tenu compte du terme (s,u) dans l'amplitude de Vénéziano, terme négligé précédemment.

Les calculs montrent alors que deux pourcentages de contributions de trajectoires restent plus ou moins indéterminés.

Compte tenu de certaines contraintes sur ces paramètres et en supposant que l'algèbre des courants donne le bon ordre de grandeur de σ_0 , on obtient alors les valeurs suivantes :

$$a^{+} = -0.036 \text{ m}_{\pi}^{-1} \quad a^{-} = 0.086 \text{ m}_{\pi}^{-1}$$

$$\text{d'où : } \sigma_0 = 0.6 \text{ mb.}$$

De tous ces résultats, je peux conclure que les théories actuelles prédisent pour σ_0 des valeurs assez variables selon les auteurs, mais tous les résultats semblent s'accorder sur le fait que cette valeur est différente de 0 :

$$0.5 \leq \sigma_0 \leq 3.5 \text{ mb} . \quad (31)$$

Sans être totalement contradictoire avec la valeur obtenue dans cette étude, le résultat (31) de la compilation précédente semble difficilement s'accorder avec le résultat expérimental (30). Celui-ci peut-on dire, favorise les auteurs que prédisent les plus basses valeurs de σ_0 .

D. ETUDE COMPARATIVE DES DIVERSES METHODES ACTUELLES D'EXTRAPOLATION

Je voudrais, dans ce dernier chapitre, donner un aperçu des différentes méthodes permettant d'étudier actuellement la diffusion $K\pi$ ou $\pi\pi$ et des résultats expérimentaux obtenus jusqu'à présent sur ce sujet.

I. Méthodes théoriques

J'ai exposé la méthode de Chew et Low au début de ce travail, mais en me limitant à la réaction $K^+\pi^- N^{*++}$. On pourrait obtenir de manière analogue les équations concernant les diffusions $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $K\pi \rightarrow K\pi$, $K\pi \rightarrow K\pi\pi$ etc...

Seulement cette méthode ne prévoit en fait que le comportement asymptotique des sections efficaces différentielles aux environs du pôle. Sans hypothèse supplémentaire, l'équation (19) devrait s'écrire en fait :

$$\frac{\delta^3 \sigma}{\delta M_{K\pi}^2 \delta M_{p\pi}^2 \delta \Delta^2} \xrightarrow{\Delta^2 \rightarrow \mu^2} \frac{1}{16\pi^3 K^2 s} \frac{1}{(\Delta^2 - \mu^2)^2} (M \cdot (Q \cdot \sigma)^{\text{on}})_{K\pi} (M \cdot (Q \cdot \sigma)^{\text{on}})_{p\pi} \quad (40)$$

où $Q_{K\pi}$ et $Q_{p\pi}$ sont les moment "on-shell" des systèmes $K\pi$ et $p\pi$:

$$Q^{\text{on}} = Q(\mu^2) = Q^{\text{off}}(\Delta^2 = \mu^2)$$

et de même, $\sigma_{K\pi}$ et $\sigma_{p\pi}$ désignent les sections efficaces réelles $K\pi \rightarrow K\pi$ et $p\pi \rightarrow p\pi$.

Pour rendre cette équation utilisable, il faut prolonger analytiquement dans le domaine physique la section efficace

différentielle "on-shell" $\left(\frac{\delta^3 \sigma}{\delta M_{K\pi}^2 \delta M_{p\pi}^2 \delta \Delta^2} \right)^{\text{on}}$ donnée par le second membre de l'équation (40).

a) La solution la plus simple consiste à effectuer un développement en $(\Delta^2 - \mu^2)$, que l'on espère rapidement convergent, au moins pour les faibles transferts de moment.

Ceci revient à supposer que l'amplitude totale de la réaction est dominée largement par l'échange d'un pion.

Mais conserver ainsi les moments "on-shell" dans le domaine physique implique que les amplitudes aux deux vertex entre lesquels est échangé le pion virtuel soient représentées par les amplitudes des processus physiques. Ceci est une hypothèse arbitraire, et non vérifiée comme on l'a vu au chapitre C-VIII.

b) C'est la raison pour laquelle tout en conservant le développement en $(\Delta^2 - \mu^2)$, le groupe où je travaille utilise les moments "off-shell" $Q(\Delta^2)$ (Réf. B-4). Avec cette supposition, l'équation (40) donne alors l'équation (19) utilisée au cours de ce travail, et que l'on peut écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\delta^3 \sigma}{\delta M_{K\pi}^2 \delta M_{p\pi}^2 \delta \Delta^2} \right)^{\text{off}} = \left(\frac{\delta^3 \sigma}{\delta M_{K\pi}^2 \delta M_{p\pi}^2 \delta \Delta^2} \right)^{\text{on}} \left(\frac{Q(\Delta^2)}{Q(\mu^2)} \right)_{K\pi} \left(\frac{Q(\Delta^2)}{Q(\mu^2)} \right)_{p\pi}$$

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\Delta^2 - \mu^2)^n \right) \quad (19)$$

c) Dürr et Pilkuhn (Réf. B-1) ont proposé des facteurs de forme pour les fonctions de vertex relativistes du modèle d'échange de

pion. Appliqué à la diffusion $K\pi$ dans la réaction $K\pi N^{*++}$, par exemple, (Réf. D-1) cela conduit à remplacer respectivement $(Q \cdot \sigma)_{p\pi}^{\text{on}}$ et $(Q \cdot \sigma)_{K\pi}^{\text{on}}$ de l'équation (40) par les expressions "off-shell" suivantes :

$$(41) \left[\begin{aligned} (Q \cdot \sigma)_{p\pi}^{\text{off}} &= \left(\frac{\Delta^2 - (M_{p\pi} + M_p)^2}{\mu^2 - (M_{p\pi} + M_p)^2} \right) \left(\frac{Q(\Delta^2)}{Q(\mu^2)} \right)^2 \left(\frac{1 + A^2 Q^2 (\mu^2)}{1 + A^2 Q^2 (\Delta^2)} \right) (Q \cdot \sigma)_{p\pi}^{\text{on}} \\ \sigma_{K\pi} &= \sigma_s + \sigma_p + \sigma_d \quad (\text{décomposition en ondes partielles}) \\ (Q \cdot \sigma_s)_{K\pi}^{\text{off}} &= (Q \cdot \sigma_s)_{K\pi}^{\text{on}} \\ (Q \cdot \sigma_p)_{K\pi}^{\text{off}} &= \left(\frac{Q(\Delta^2)}{Q(\mu^2)} \right)^2 \left(\frac{1 + P^2 Q^2 (\mu^2)}{1 + P^2 Q^2 (\Delta^2)} \right) (Q \cdot \sigma_p)_{K\pi}^{\text{on}} \\ (Q \cdot \sigma_d)_{K\pi}^{\text{off}} &= \left(\frac{Q(\Delta^2)}{Q(\mu^2)} \right)^4 \left(\frac{9 + 3 D^2 Q^2 (\mu^2) + D^4 Q^4 (\mu^2)}{9 + 3 D^2 Q^2 (\Delta^2) + D^4 Q^4 (\Delta^2)} \right) (Q \cdot \sigma_d)_{K\pi}^{\text{on}} \end{aligned} \right.$$

σ_p^{on} peut alors être représentée par une distribution de Breit et Wigner ayant les paramètres du K_{890}^* , soit $Bw(K_{890}^*)$. De même, on peut prendre $\sigma_d^{\text{on}} = \alpha^2 Bw(K_{1400}^*)$ où α (≈ 0.52) est le coefficient d'inélasticité. La hauteur de ces distributions est donnée par la limite d'unitarité. En ce qui concerne σ_s^{on} , un polynôme en $M_{K\pi}$ peut suffire.

A, P et D sont les paramètres libres du modèle de Dürre-Pilkuhn. Dans le cas non relativiste, ces paramètres seraient interprétés comme étant les rayons d'interaction.

Quelques facteurs supplémentaires sont parfois utilisés. Wolf (Réf. D-2) a proposé de multiplier chacune des expressions

"off-shell" ci-dessus par le facteur :

$$G(\Delta^2) = \left(\frac{C - \mu^2}{C - \Delta^2} \right)^2 \quad \text{avec } C = (2.29 \pm 0.27) \text{ GeV}^2 \quad (42)$$

valeur obtenue à partir d'une étude des diffusions pp ou $p\bar{p}$, expérimentalement observables. L'étude de ces mêmes diffusions donne également pour le N^* le résultat :

$$A = (3.97 \pm 0.11) \text{ GeV}^{-1}$$

soit finalement :

$$\left(\frac{\delta^3 \sigma}{\delta M_{K\pi}^2 \delta M_{p\pi}^2 \delta \Delta^2} \right)^{\text{off}} = \left(\frac{\delta^3 \sigma}{\delta M_{K\pi}^2 \delta M_{p\pi}^2 \delta \Delta^2} \right)^{\text{on}} \left(\frac{(Q \cdot \sigma)^{\text{off}}}{(Q \cdot \sigma)^{\text{on}}} \right)_{K\pi} \left(\frac{(Q \cdot \sigma)^{\text{off}}}{(Q \cdot \sigma)^{\text{on}}} \right)_{p\pi} G(\Delta^2)$$

Compte tenu de (41) et $G(\Delta^2)$ étant égal à 1 ou donné par (42).

d) Ferrari et Selleri ont élaboré de leur côté une formulation mathématique du modèle d'échange de π (Réf. D-3), en s'intéressant plus particulièrement, comme beaucoup d'auteurs, à la diffusion $\pi\pi$.

Dans les réactions $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ ou $KN \rightarrow K\pi N$, le prolongement analytique ainsi prévu par le modèle pour des diffusions $\pi\pi$ ou $K\pi$ dans l'onde ℓ consiste à multiplier l'expression "on-shell" (du type de l'équation 40) par :

$$\left(\frac{Q(\Delta^2)}{Q(\mu^2)} \right)^{2\ell} F^2(\Delta^2) \quad \text{avec } F(\Delta^2) = K(\Delta^2) K'(\Delta^2) K''(\Delta^2)$$

K , K' et K'' sont les facteurs de forme provenant respectivement de l'émission, la propagation et l'absorption du pion virtuel échangé. Ces facteurs sont bien entendu normalisés à 1 au pôle.

A défaut d'informations précises sur ces 3 facteurs, Selleri suppose :

$$K(\Delta^2) = K'(\Delta^2) = K''(\Delta^2)$$

car ces facteurs, d'après la théorie de la dispersion, ne dépendent que du pion échangé (Réf. D-4).

L'étude expérimentale des réactions $NN \rightarrow NN\pi$ permet d'autre part de déterminer le facteur $F(\Delta^2)$ (Réf. D-5).

Un ajustement sur l'expression $\frac{1 - A}{1 + \frac{\Delta^2 - \mu^2}{\alpha}} + A$, dont

la forme rappelle celle utilisée pour les facteurs de forme électromagnétiques donne

$$A = 0.28 \quad \text{et} \quad \alpha = -4.73 \mu^2$$

$$\text{soit } F(\Delta^2) = \frac{0.72}{1 - \frac{\Delta^2 - \mu^2}{4.73 \mu^2}} + 0.28$$

$$\text{et } \sigma_{K\pi}^{\text{off}} = F^2(\Delta^2) \left(\sigma_s^{\text{on}} + \left(\frac{Q(\Delta^2)}{Q(\mu^2)} \right)^2 \sigma_p^{\text{on}} + \left(\frac{Q(\Delta^2)}{Q(\mu^2)} \right)^4 \sigma_d^{\text{on}} \right)$$

Les références 0.2 et D.6, par exemple, utilisent la formulation de Ferrari et Selleri.

e) Plus récemment, Lovelace (Réf. D-7) et Wagner (Réf. D-8) ont présenté une application du modèle de Vénéziano aux diffusions $K\pi$, $\pi\pi$ et $K\bar{K}$, donnant ainsi une expression des amplitudes et sections efficaces "off-shell" que l'on peut utiliser ensuite comme prolongement analytique de l'équation (40) (Réf. B-3 et D-9).

Pour ne considérer que la diffusion $K\pi$, l'amplitude "off-shell" de spin ℓ et d'isospin I est alors, d'après les calculs :

$$f_{\text{off}}^{\ell, I} = \beta e^{\gamma(\Delta^2 - \mu^2)} \frac{V_{\text{off}}^{\ell, I}(M_{K\pi})}{1 - \frac{2i Q(\mu^2)}{M_{K\pi}} \beta V_{\text{on}}^{\ell, I}(M_{K\pi})} \quad (43)$$

$V_{\text{off}}^{\ell, I}(V_{\text{on}}^{\ell, I})$ est la projection (en ondes partielles) de l'amplitude de Vénéziano "off-shell" ("on-shell")

$$V_{\text{off}}^{\ell, I}(M_{K\pi}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_{\ell}(\cos \theta) V^I(M_{K\pi}, t(\cos \theta, \Delta^2)) d(\cos \theta) \quad (44)$$

Posons $s = M_{K\pi}^2$; les amplitudes d'isospin sont données, avec les notations habituelles, par :

$$V^{1/2} = \frac{2}{3} V(s, t) - \frac{1}{2} V(u, t)$$

$$V^{3/2} = V(u, t)$$

avec
$$V(s, t) = - \frac{\Gamma(1 - \alpha_K^*(s)) \Gamma(1 - \alpha_{\rho}(t))}{\Gamma(1 - \alpha_K^*(s) - \alpha_{\rho}(t))}$$

$V_{\text{on}}^{\ell, I}$ s'obtient de manière identique à (44) en remplaçant partout t par sa valeur "on-shell" μ^2 .

Les trajectoires du ρ et du K^* varient un peu selon les auteurs (réf. C-9, D-7, D-8 et D-10 par exemple). On peut prendre, comme au chapitre C-XI :

$$\alpha_K^*(s) = 0.89 (s - m_K^2) + 0.5$$

$$\alpha_{\rho}(t) = 0.89 (t - \mu^2) + 0.5$$

β et γ sont les constants à déterminer à partir des distributions expérimentales.

Il faut remarquer que le modèle de Vénéziano unitaire appliqué ci-dessus prévoit des corrections "off-shell" pour l'onde s , à la différence des facteurs de forme de Dürr et Pilkuhn.

Il faut noter également que les calculs ci-dessus ne s'appliquent que dans un domaine où n'existe aucun canal inélastique important. Cela limite l'étude de la diffusion $K\pi$ à $M_{K\pi} < 1.2 \text{ GeV}$ environ.

En résumé, tous les auteurs s'accordent avec les prévisions de Chew et Low ou du modèle OPE près du pôle (équation 40). Cette concordance paraît assez facile puisque ce type de relations est inutilisable pratiquement si l'on ne précise pas de prolongement analytique de la section efficace différentielle dans la région physique.

C'est bien entendu sur ce dernier point que les diverses publications et théories diffèrent plus ou moins.

En pratique, il arrive souvent que l'on utilise un mélange ou des variantes des méthodes exposées ici.

La référence B-3 par exemple, utilise le modèle de Vénéziano au vertex du K^+ et les facteurs de forme de Dürr-Pilkuhn au vertex du proton.

De même dans la référence D-9, l'amplitude de Vénéziano $K\pi$ (43) s'écrit sous la forme :

$$f_{\text{off}}^{\ell, I} = \beta e^{\gamma(\Delta^2 - \mu^2)} \frac{V_{\text{off}}^{\ell, I}(M_{K\pi})}{1 + \left(a^{\ell, I} - \frac{2i Q(\mu^2)}{M_{K\pi}} \right) \beta V_{\text{on}}^{\ell, I}(M_{K\pi})}$$

Le paramètre supplémentaire $a^{\ell, I}$ permet de faire varier la position du maximum de chaque onde partielle. En particulier, ceci permet de trouver le maximum de l'onde s vers 1.1 GeV (au lieu de 0.890 GeV si $a^{\ell, I} = 0$), et d'accorder ainsi la théorie avec certaines publications expérimentales (Réf. D-1 et D-11).

II. Résultats expérimentaux

1) Je dois faire remarquer tout d'abord qu'une étude de la diffusion $\pi\pi$ ou $K\pi$ sur une réaction à 3 corps dans l'état final diffère de celle effectuée sur une réaction à 4 corps du type $K\pi N^*$, en effet :

a) il intervient la constante de couplage pion-nucléon au vertex du proton, tandis que dans la réaction $K\pi N^*$, celle-ci est remplacée par la section efficace de diffusion $\pi p \rightarrow \pi p$. Les incertitudes résultant de ces quantités sont du même ordre de grandeur (3 % environ). Mais l'emploi d'une constante de couplage impose un certain mode d'interaction qui ne correspond pas toujours nécessairement à la réalité.

Certains auteurs (réf. D-12) utilisent cependant une constante de couplage $p\pi N^*$, calculée à partir de la largeur du N^* , ceci est équivalent à considérer $\sigma_{p\pi} +$ comme une constante (cf. Chap. C-II).

b) il intervient un facteur Δ^2/μ^2 , qui n'existe pas dans la formule d'extrapolation d'un processus $K\pi N^*$. Si l'on suppose alors que la réaction considérée est due uniquement à un échange de π , on peut imposer à la courbe extrapolée de passer par l'origine. Cependant, une telle contrainte, si elle diminue grandement les incertitudes statistiques, peut introduire un biais; elle suppose en effet que

toutes les contributions, hormis celle de l'échange d'un pion, sont nulles au voisinage de $\Delta^2 = 0$.

2) Même si je ne considère dans cette étude que la diffusion $K\pi$, il me semble intéressant de mentionner le premier travail effectué avec une bonne statistique sur la diffusion $\pi\pi$ (Réf. 0-2 à 0-4). Baton et Laurens trouvent une section efficace de diffusion $\pi^-\pi^0$ compatible avec la limite d'unitarité (figure D-1) en imposant une contribution nulle aux processus autres que celui d'échange d'un pion (cf. remarque b. ci-dessus). La figure D-1 montre également, en fonction de $M_{\pi\pi}$, la variation de la pente de diverses extrapolations (ajustements linéaires par intervalles) : Ces variations sont bien plus significatives que celles que j'ai obtenues (cf. Chap. C-V), mais les conditions d'extrapolation ne sont pas les mêmes. Cela constitue un argument contre la validité de facteurs de forme dépendant trop faiblement de $M_{\pi\pi}$ (Réf. D-4 et chapitre D-1-d par exemple).

L'étude du déphasage δ_1^1 (notation : δ_ℓ^{2I}) montre que celui-ci passe par 90° aux environs de 750 MeV. La même analyse situe ainsi le ρ^- à (755 ± 5) MeV avec une largeur de (110 ± 9) MeV, valeurs assez différentes de celles obtenues à partir des spectres de masse effective (cf. chapitre C-IX).

3) De nombreuses études ont déjà été consacrées à la diffusion $\pi\pi$ mais les lots d'événements disponibles augmentant sans cesse, la diffusion $K\pi$ commence à être étudiée aussi extensivement que la diffusion $\pi\pi$ (pour une comparaison entre ces 2 systèmes, on peut consulter par exemple la référence D-13).

Ces divers travaux portent sur la détermination des sections efficaces totales et différentielles dans les différents états de charge $K\pi$ ainsi que sur les distributions angulaires et les déphasages

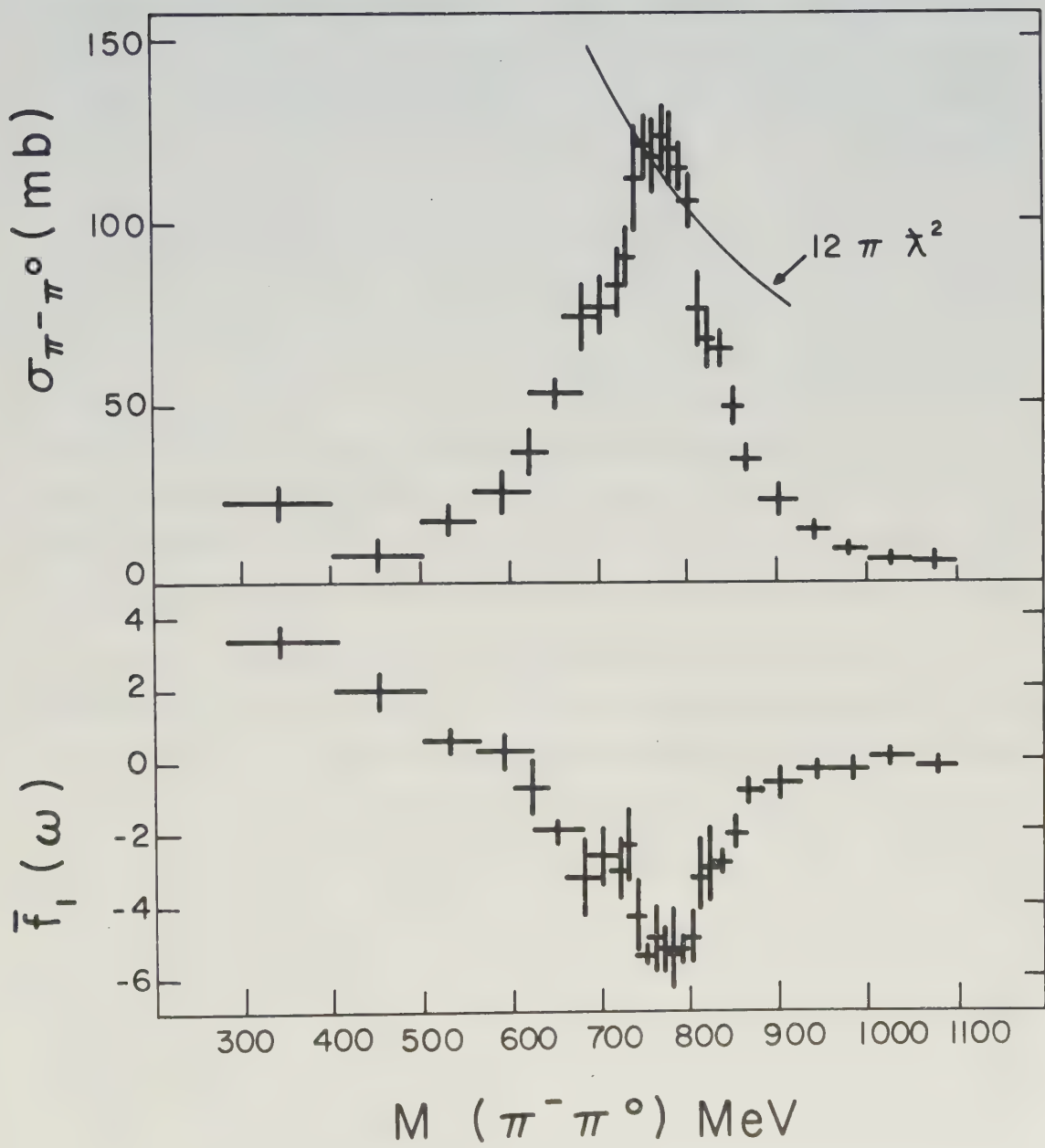


fig. D-1

des différentes ondes partielles. Toutes ces quantités sont obtenues par extrapolation. Il faut cependant éviter d'étudier les canaux sans échange de charge ($K^+ \pi^0 \rightarrow K^0 \pi^+$) car la contribution de l'échange d'un ω est alors importante.

Il est également intéressant de déterminer les moments $\langle Y_\ell^m \rangle$ "off-shell" : dans le cas de la réaction $K\pi N^*$, la comparaison entre les moments "on-shell" et "off-shell" du système $p\pi^+$ permet en effet d'avoir une idée de l'importance des effets "off-shell" dans la réaction.

Je vais essayer de résumer les principaux résultats des diverses études effectuées jusqu'à présent.

La section efficace totale $\sigma_{K^+\pi^-}$:

$\sigma_{K^+\pi^-}$ est généralement compatible avec la limite d'unitarité pour une onde $P_{1/2}$ dans la région du K_{890}^* (Réf. D-1 et D-12) mais comme je l'ai montré au cours de cette étude, il est possible de jouer avec les conditions d'ajustement pour qu'il en soit ainsi.

A 5.5 GeV/c, la référence D-12 donne une valeur maximale de $\sigma_{K\pi}$ égale à 75 millibarns environ. Or on a vu au cours de cette étude qu'avec la même valeur de la section efficace 4 corps σ_T et les mêmes événements, je trouve 101 millibarns (chapitre C-X et appendice B-II).

A 7.3 GeV/c Trippe (Réf. D-1 et D-11) utilise la valeur $\sigma_T = (1.75 \pm 0.15)$ mb et trouve une valeur maximale de $\sigma_{K\pi}$ compatible avec la limite d'unitarité. Or d'après la figure C-5 et la confirmation donnée par l'appendice B-II, il me semble que cette valeur de σ_T est surestimée d'environ 0.4 mb : dans les travaux d'extrapolation, l'important problème de la normalisation des sections efficaces n'est pas encore résolu.

En dehors du K_{890}^* , la région proche du seuil est en général peu étudiée à cause des faibles statistiques disponibles. La référence D-1 donne $\sigma_{\text{seuil}} = (6.6 \pm 3.3) \text{ mb}$, mais ce résultat dépendant entre autres conditions, des limites d'unitarité $P_{1/2}$ et $D_{1/2}$, est à mon avis biaisé. Au chapitre C-XI je donne comme valeur : $\sigma_{\text{seuil}} \leq 0.5 \text{ mb}$; d'autres déterminations de cette quantité seraient les bienvenues.

Au delà du K_{890}^* , outre le K_{1400}^* , le principal problème actuellement concerne l'existence d'une éventuelle résonance 0^+ vers 1.1 GeV. La limite d'unitarité pour une onde s étant de 10 à 12 millibarns dans cette région il est facile de trouver que $\sigma_{K\pi}$ est tangente à cette limite compte tenu des incertitudes expérimentales actuelles. Malgré tout, les tableaux C-17 et C-18 au chapitre C-IX montrent à mon avis qu'on ne peut rien conclure au sujet de cette résonance, du moins d'après l'étude de $\sigma_{K\pi}$. Aucune bosse n'apparaît et c'est la raison pour laquelle je n'en ai pas tenu compte dans la paramétrisation globale.

L'isospin $I = 3/2$

La quantité $(2\sigma_{K^0\pi^0} - \sigma_{K^+\pi^-})$, qui doit être nulle si la diffusion $K\pi$ ne fait intervenir que l'état d'isospin $I = 1/2$, permet donc d'étudier l'existence éventuelle et l'importance de l'état $I = 3/2$.

Dans les interactions de K^+ , cette méthode est d'ailleurs préférable à l'étude directe de $\sigma_{K^+\pi^+}$ dans la réaction $K^+\pi^+p\pi^-$; ce canal est en effet très fortement contaminé par le processus $K^+\pi^-N^*$ et il est difficile d'obtenir des résultats significatifs (Réf. B-4). La réaction $K^-p \rightarrow K^-\pi^-p\pi^+$ qui permet de déterminer $\sigma_{K^-\pi^-}$ est par contre peu contaminée, tout au moins à énergie assez élevée, et donc meilleure pour étudier cet état d'isospin (Réf. D-6).

De toutes ces études il ressort que l'onde $I = 3/2$, sans être négligeable, semble faible jusqu'à des énergies élevées, de l'ordre de 1.8 GeV :

$$\sigma_{3/2} = (\sigma_s + \sigma_p + \dots)_{3/2} \lesssim 10 \text{ mb}$$

A titre d'exemple, la figure D-2 donne les valeurs de $\sigma_{K^+\pi^+}$ obtenues à 5.0 GeV/c avec "Extrapol-Int" (ajustements du 1er au 4ème degré) : $\sigma_{K^+\pi^+}$ dépend bien plus du degré du développement que $\sigma_{K^+\pi^-}$, bien que les résultats semblent se stabiliser à partir du second degré.

L'onde $I = 3/2$ entraîne l'existence des déphasages δ_0^3 et δ_1^3 . Mais puisque $\sigma_{K^+\pi^-}$ est vraiment très bien représentée par une distribution de Breit et Wigner dans la région du K_{890}^* , il semble logique de supposer $\delta_1^3 \approx 0$ pour ne pas créer d'interférence (réf. D-12). Ceci est d'ailleurs en accord avec les prédictions de Lovelace (réf. D-7). Malheureusement, une détermination précise de ces déphasages nécessiterait la connaissance des moments du système $K^0\pi^0$, et les événements $K^0\pi^0 N^*$ sont encore trop peu nombreux.

En attendant ce résultat, on constate heureusement que la valeur de δ_0^3 , qu'elle soit choisie nulle ou égale aux prédictions de Lovelace (réf. D-7), influe peu sur la détermination des autres déphasages (réf. D-12).

Le déphasage δ_0^1 et le K_{1100}^*

Les résultats concernant les distributions angulaires sont en général moins significatifs que ceux concernant les sections efficaces car il est nécessaire de différencier une fois de plus la formule d'extrapolation et la densité d'événements devient assez

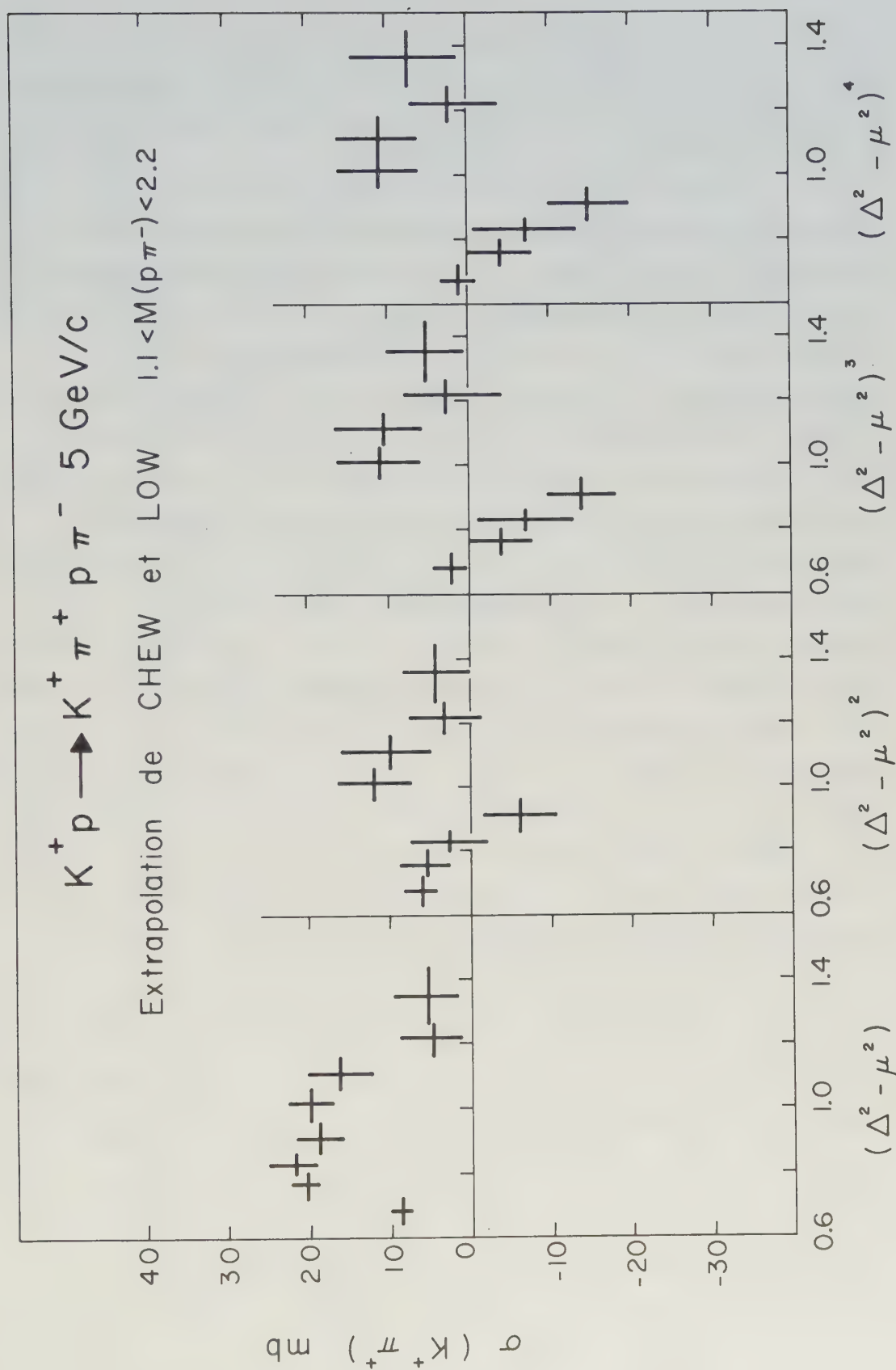


fig. D-2

faible. De plus, les prolongements "on-shell" de ces distributions, quand ils sont effectués, ne le sont pas toujours avec beaucoup de rigueur et il est difficile d'en tirer des conclusions très précises.

L'essentiel des efforts concernant la détermination des déphasages et des distributions angulaires est concentré en ce moment sur l'onde s vers 1.1 GeV. L'éventualité d'une résonance large dans cette région émise en premier lieu par Trippe, Schlein et al (réf. B-2 , D-1 et D-11) à partir de la réaction $K^+ \pi^- N^*$, apparaissait déjà en étudiant les paramètres d'asymétrie du système $K\pi$ (réf. B-3 , D-14 etc...). Schlein, constatant que les moments $\langle Y_\ell^0 \rangle$ "off-shell" et "on-shell" du système $p\pi^+$ étaient à peu près identiques, au moins dans la région du N^* , suppose en première approximation qu'il en est de même du système $K\pi$; il suppose en outre que l'onde $I = 3/2$ est négligeable et en déduit que le déphasage δ_0^1 semble passer par 90° vers 1.1 GeV. Ce résultat ajouté à celui concernant la section efficace a conduit à émettre l'hypothèse d'une nouvelle résonance $K\pi$. Mais une telle affirmation me semble à mon avis prématurée. Au chapitre C.IX, il n'apparaît pas clairement que $\sigma_{K\pi}$ soit résonant dans cette région. D'autre part, chacun sait qu'il existe une ambiguïté sur le déphasage δ_0^1 : si l'on ne considère que les ondes s et p , l'expression des moments en fonction des déphasages montre que ces moments restent identiques avec

$$\delta_0^1 \text{ et } \delta_0^{'1} = \frac{\pi}{2} + \delta_1^1 - \delta_0^1 .$$

Si l'on tient compte de l'onde d ($M_{K\pi} > 1.2$ GeV), l'ambiguïté demeure, mais cette fois entre

$$\delta_0^1 \text{ et } \delta_0^{'1} = \frac{\pi}{2} + \delta_2^1 - \delta_0^1 .$$

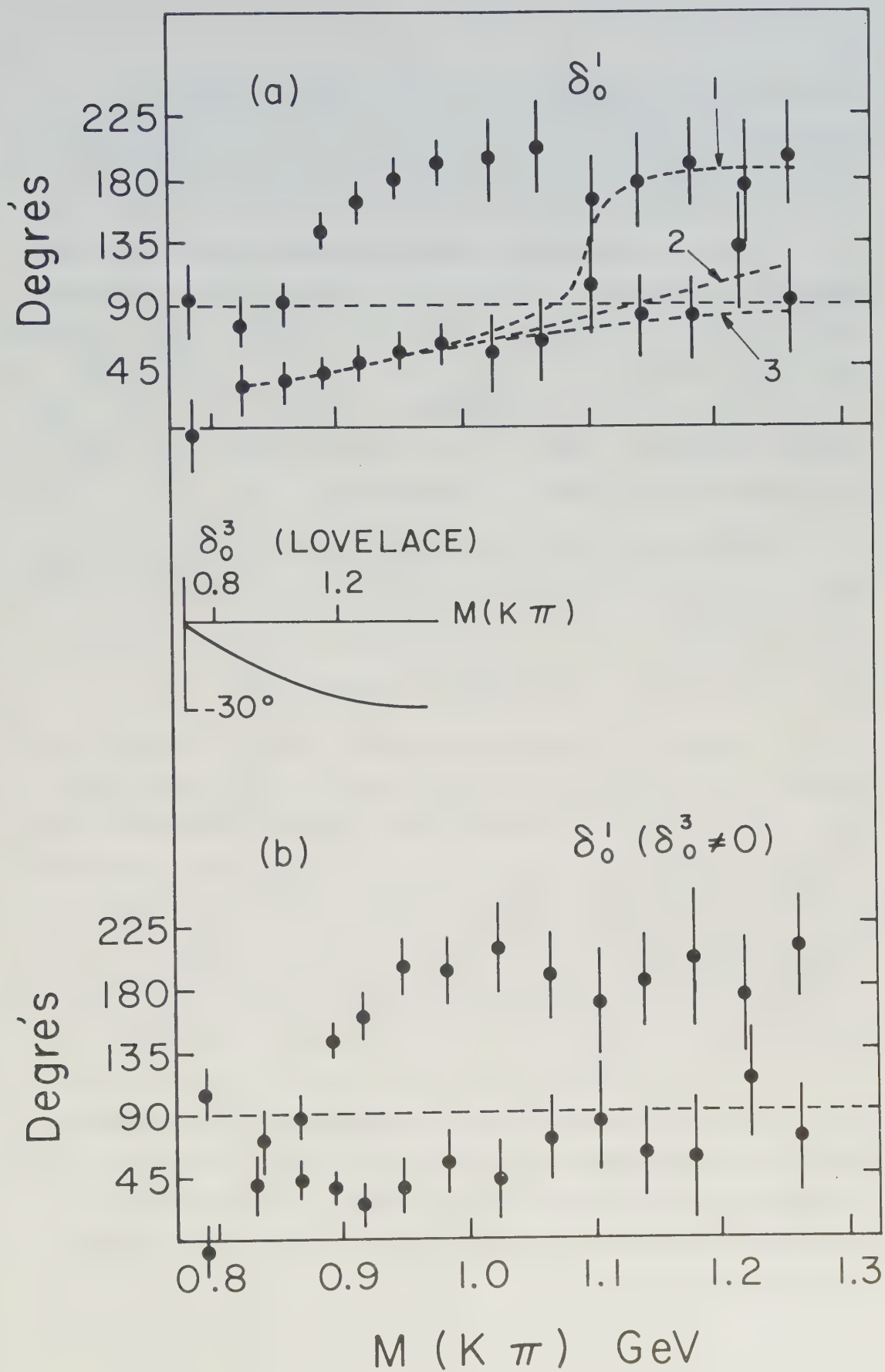


fig. D - 3

La figure D-3, extraite de la référence D-12, donne une des meilleures déterminations actuelles de δ_0^1 , (a) en supposant $\delta_0^3 = 0$, (b) en prenant δ_0^3 égal aux prédictions de Lovelace.

On peut remarquer sur cette figure que la seule étude des déphasages ne permet pas actuellement de séparer les deux déterminations, la plus haute ("up") et la plus basse ("down"). Deux croisements sont en effet possibles, l'un vers 0.85 - 0.90 GeV, l'autre vers 1.1 GeV, séparant ainsi le diagramme en 3 régions ; on obtient ainsi 8 solutions possibles, selon la détermination choisie dans chacune de ces régions ("up-up-down", "down-down-up", etc ...).

Près du seuil, les auteurs s'accordent à prendre la solution "down": le moment $\langle Y_1^0 \rangle$, qui est proportionnel à $\sin^2 \delta_0^1$ tant qu'il n'y a pas d'onde d, croît en effet dans cette région; il en est donc de même de δ_0^1 , ce qui explique le choix effectué.

Au premier croisement, la solution "down-up" donnerait un déphasage passant par 90° , conduisant ainsi à un K_{890}^* étroit dans l'onde s. Ceci pourrait expliquer une certaine tendance de $\sigma_{K\pi}^{+-}$ à dépasser la limite d'unitarité pour une onde p dans cette région, tout en s'accordant mieux avec les prévisions de Lovelace (réf. D-7). Il paraît cependant plus raisonnable d'envisager qu'une telle résonance n'existe pas et que par conséquent il n'y a pas de croisement à cet endroit; la solution "down" est certainement la bonne solution jusqu'à 1.1 GeV.

Mais si l'on envisage la solution notée (1) sur la figure D-3, on aboutit également à l'existence d'une résonance étroite inobservée, cette fois vers 1.1 GeV. Un K_{1080}^* a bien été observé comme bosse directe dans le système $K\pi$ (réf. D-15), mais personne ne l'a confirmé depuis.

Finalement, la solution "down-down-down" semble bien être la seule qui ne soit pas contredite par les données expérimentales. Elle permet d'envisager l'existence d'un K_{1100}^* de largeur élevée, mais comme il est impossible de décider entre les solutions (2) et (3) de la figure D-3, on ne peut rien conclure.

Ceci ressemble à la situation concernant le système $\pi\pi$ et le déphasage δ_0^0 (réf. D-16) : les solutions "up-up" et "down-up", qu'il reste encore à séparer clairement, entraînent l'existence du σ , aujourd'hui confondu avec le ϵ^0 , et expliquent l'asymétrie dans la région du ρ .

Pour lever les ambiguïtés et résoudre le problème, il faudrait étudier les 3 diffusions :

$$K^+ \pi^- \rightarrow K^+ \pi^-$$

$$K^+ \pi^- \rightarrow K^0 \pi^0$$

$$K^- \pi^- \rightarrow K^- \pi^-$$

avec des statistiques plus importantes qu'à l'heure actuelle.

En attendant, je peux résumer le problème de la façon suivante : il y a deux manières de mettre en évidence cette résonance K_{1100}^* : l'étude de la section efficace et celle des distributions angulaires (moment, déphasages, asymétrie). A l'heure actuelle, aucune des deux ne permet de donner une conclusion sure. Selon l'interprétation qu'ils donnent à leurs résultats, les auteurs croient ou non à l'existence de cette résonance. Il y a les fervents (réf. B-3 , D-11) et les sceptiques (réf. B-4 , D-12). Me rangeant à l'avis de ces derniers, le K_{1100}^* n'est encore pour moi qu'une hypothèse.

Il en est de même d'ailleurs d'un certain nombre de résonances observées dans le système $K\pi$: outre le kappa, aujourd'hui décédé, des auteurs parlent de K_{1080}^* (réf. D-15), K_{1160}^* (réf. D-17) , K_{1260}^* (réf. D-18). Mais le K_{1100}^* , si jamais il existe, est attendu avec impatience par les théoriciens pour combler les cases vides du nonet scalaire 0^+ et y rejoindre le $\sigma(750)$, le $\delta(960)$ et le $S^*(1070)$.

CONCLUSION

Je voulais, au cours de cette étude, déterminer par extrapolation les divers paramètres du K_{890}^* , du K_{1400}^* et d'un éventuel K_{1100}^* . De nombreuses difficultés, et le manque d'événements m'ont obligé à me borner au K_{890}^* et à constater l'absence de bosse significative vers 1.1 GeV/c.

Cependant, je dois faire remarquer qu'à l'heure actuelle, il n'est pas encore possible d'effectuer une étude correcte et précise de la diffusion $K\pi$, et ceci pour deux raisons majeures :

- une détermination exacte des sections efficaces $\sigma_{K\pi}$ nécessite la connaissance précise de la section efficace totale σ_T (plutôt qu'une haute statistique);
- un grand nombre d'événements est par contre requis pour une étude correcte des déphasages et des distributions angulaires.

Ces deux conditions seront, je l'espère, bientôt remplies. Cela permettrait en outre d'utiliser les méthodes d'extrapolation dépendant du plus faible nombre de conditions théoriques, autrement dit, les méthodes les moins sujettes à caution, et d'écarter éventuellement certains des prolongements analytiques actuels de la formule de Chew et Low.

Tous ces résultats concernant la diffusion $K\pi$ (ou $\pi\pi$) sont, comme on le voit, d'une extrême importance pour notre compréhension du monde des interactions fortes. Ce n'est donc pas par hasard que des équipes de plus en plus nombreuses travaillent sur le sujet ou que des conférences de physique, telles que celle d'Argonne au mois de mai 1969, se consacrent uniquement aux interactions $\pi\pi$ et $K\pi$.

REMERCIEMENTS

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Leprince-Ringuet qui a patronné mes premiers pas dans la physique et à Monsieur Grégory qui m'a permis de travailler au CERN. Ce travail a été effectué dans la division TC dirigée par Monsieur Peyrou dont l'expérience et l'enthousiasme m'ont été précieux.

Je tiens à remercier Messieurs Yves Goldschmidt-Clermont et Francis Muller, ainsi que tous les membres de leur groupe, physiciens et techniciennes, pour l'aide et les conseils qu'ils m'ont apportés.

Mes remerciements s'adressent en particulier à Monsieur Daniel Drijard pour de nombreuses et fructueuses discussions.

Je remercie également les autres équipes expérimentales de la collaboration mondiale de mésons K^+ , sans lesquelles je n'aurais pu effectuer ce travail.

Je tiens enfin à exprimer ma reconnaissance envers Mademoiselle Helga Maiwald qui a tapé cette thèse et Madame Claude Magnin qui en a assuré les dessins.

APPENDICE A

Calcul des dérivées L' et L''

$$\begin{aligned} \text{Je pose :} \quad & \text{STEP}(3) = \beta A \\ & \text{STEP}(4) = \alpha A + \gamma B + C \\ & \text{STEP}(5) = \beta B \end{aligned}$$

$$\text{alors pour } i > 2 : \quad \frac{\partial L}{\partial \text{COE}(i)} = \sum_K \frac{\text{STEP}(i)}{\text{FL}_K}$$

$$\text{et pour } i > 2, j > 2 : \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \text{COE}(i) \partial \text{COE}(j)} = - \sum_K \frac{\text{STEP}(i) \text{STEP}(j)}{\text{FL}_K^2}$$

$$\text{à condition d'ajouter en outre à } \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \alpha} \quad \text{la somme } \sum_K \frac{A}{\text{FL}_K}$$

$$\text{et à } \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \gamma} \quad \text{la somme } \sum_K \frac{B}{\text{FL}_K}$$

Les dérivées où interviennent M_O et Γ sont plus compliquées, car M_O et Γ n'interviennent pas du tout linéairement dans l'expression de L . Soit donc à calculer :

$$\frac{\partial L}{\partial M_O} \frac{\partial L}{\partial \Gamma} \frac{\partial^2 L}{\partial M_O^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \Gamma^2} \frac{\partial^2 L}{\partial M_O \partial \Gamma} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial M_O \partial \text{COE}(i)} \frac{\partial^2 L}{\partial \Gamma \partial \text{COE}(i)} \quad \text{pour } i > 2$$

on a :

$$\frac{\partial L}{\partial M_O} = \sum_K \frac{\partial \text{FL}_K / \partial M_O}{\text{FL}_K} = \beta \alpha \sum_K \frac{\partial A / \partial M_O}{\text{FL}_K} ; \text{ je pose } \text{STEP}(1) = \frac{\partial A}{\partial M_O}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Gamma} = \sum_K \frac{\partial \text{FL}_K / \partial \Gamma}{\text{FL}_K} = \beta \alpha \sum_K \frac{\partial A / \partial \Gamma}{\text{FL}_K} ; \text{ je pose } \text{STEP}(2) = \frac{\partial A}{\partial \Gamma}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial M_O^2} = \beta \alpha \left[\sum_K \left(\frac{1}{\text{FL}_K} \frac{\partial^2 A}{\partial M_O^2} \right) - \sum_K \left(\frac{\text{STEP}(1)^2}{\text{FL}_K^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Gamma^2} = \beta \alpha \left[\sum_K \left(\frac{1}{FL_K} \frac{\partial^2 A}{\partial \Gamma^2} \right) - \sum_K \left(\frac{STEP(2)^2}{FL_K^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial M_O \partial \Gamma} = \beta \alpha \left[\sum_K \left(\frac{1}{FL_K} \frac{\partial^2 A}{\partial M_O \partial \Gamma} \right) - \sum_K \left(\frac{STEP(1) \cdot STEP(2)}{FL_K^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial M_O \partial \alpha} = -\beta \alpha \sum_K \left(\frac{STEP(1) \cdot STEP(3)}{FL_K^2} \right) + \beta \sum_K \left(\frac{STEP(1)}{FL_K} \right)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial M_O \partial \beta} = -\beta \alpha \sum_K \left(\frac{STEP(1) \cdot STEP(4)}{FL_K^2} \right) + \alpha \sum_K \left(\frac{STEP(1)}{FL_K} \right)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Gamma \partial \alpha} = -\beta \alpha \sum_K \left(\frac{STEP(2) \cdot STEP(3)}{FL_K^2} \right) + \beta \sum_K \left(\frac{STEP(2)}{FL_K} \right)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Gamma \partial \beta} = -\beta \alpha \sum_K \left(\frac{STEP(2) \cdot STEP(4)}{FL_K^2} \right) + \alpha \sum_K \left(\frac{STEP(2)}{FL_K} \right)$$

et pour $i > 4$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial M_O \partial COE(i)} = -\beta \alpha \sum_K \left(\frac{STEP(1) \cdot STEP(i)}{FL_K^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Gamma \partial COE(i)} = -\beta \alpha \sum_K \left(\frac{STEP(2) \cdot STEP(i)}{FL_K^2} \right)$$

Toutes ces expressions sont complètement explicitées si je calcule les quantités :

$$\text{STEP}(1) = \frac{\partial A}{\partial M_0} = \sigma_{p\pi^+} \frac{\partial B_w(K^*)}{\partial M_0} - M^4 (\Delta^2 - \mu^2) \frac{\partial B_1'}{\partial M_0}$$

$$\text{STEP}(2) = \frac{\partial A}{\partial \Gamma} = \sigma_{p\pi^+} \frac{\partial B_w(K^*)}{\partial \Gamma} - M^4 (\Delta^2 - \mu^2) \frac{\partial B_1'}{\partial \Gamma}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial M_0^2} = \sigma_{p\pi^+} \frac{\partial^2 B_w(K^*)}{\partial M_0^2} - M^4 (\Delta^2 - \mu^2) \frac{\partial^2 B_1'}{\partial M_0^2}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \Gamma^2} = \sigma_{p\pi^+} \frac{\partial^2 B_w(K^*)}{\partial \Gamma^2} - M^4 (\Delta^2 - \mu^2) \frac{\partial^2 B_1'}{\partial \Gamma^2}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial M_0 \partial \Gamma} = \sigma_{p\pi^+} \frac{\partial^2 B_w(K^*)}{\partial M_0 \partial \Gamma} - M^4 (\Delta^2 - \mu^2) \frac{\partial^2 B_1'}{\partial M_0 \partial \Gamma}$$

Finalement, tout revient à calculer les cinq dérivées premières et secondes de $B_w(K^*)$ par rapport à M_0 et Γ .

En effet si DF désigne un opérateur différentiel quelconque on a :

$$DF(B_1') = \int_V DF(B_w(K^*)) \cdot \sigma_{p\pi^+} \frac{\Phi}{(\Delta^2 - \mu^2)^2}$$

car les fonctions à intégrer sont analytiques sur le volume V d'intégration, et l'on peut dériver autant que l'on veut sous le signe somme.

Or on a :

$$Bw(K^*) = \frac{K}{(M-M_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} f(M) = \frac{Kf(M)}{W(M)} \quad \text{avec } K = \frac{T'}{I} \frac{\int_a^b \frac{q}{M} dM}{\int_a^b \frac{f(M)}{W(M)} dM}$$

D'où :

$$\frac{\partial Bw(K^*)}{\partial M_0} = f(M) \left\{ \frac{1}{W(M)} \frac{\partial K}{\partial M_0} - \frac{K}{W^2(M)} \frac{\partial W(M)}{\partial M_0} \right\}$$

$$\text{or } \frac{\partial K}{\partial M_0} = - \frac{T'}{I^2} \frac{\partial I}{\partial M_0} = - \frac{K^2}{T'} \frac{\partial I}{\partial M_0} \quad \text{avec } \frac{\partial I}{\partial M_0} = \int_a^b \frac{2f(M)(M-M_0)}{W^2(M)} dM$$

$$\text{et } \frac{\partial W(M)}{\partial M_0} = - 2(M-M_0)$$

soit:

$$\frac{\partial Bw(K^*)}{\partial M_0} = - \frac{K^2}{T'} \frac{f(M)}{W(M)} \frac{\partial I}{\partial M_0} + \frac{2K f(M) (M-M_0)}{W^2(M)}$$

$$\frac{\partial Bw(K^*)}{\partial \Gamma} = f(M) \left\{ \frac{1}{W(M)} \frac{\partial K}{\partial \Gamma} - \frac{K}{W^2(M)} \frac{\partial W(M)}{\partial \Gamma} \right\}$$

$$\text{or } \frac{\partial K}{\partial \Gamma} = - \frac{K^2}{T'} \frac{\partial I}{\partial \Gamma} \quad \text{avec } \frac{\partial I}{\partial \Gamma} = \int_a^b \frac{-\Gamma f(M)}{2W^2(M)} dM$$

$$\text{et } \frac{\partial W(M)}{\partial \Gamma} = \frac{\Gamma}{2}$$

soit:

$$\frac{\partial Bw(K^*)}{\partial \Gamma} = - \frac{K^2 f(M)}{T' \cdot W(M)} \frac{\partial I}{\partial \Gamma} - \frac{K \cdot \Gamma \cdot f(M)}{2W^2(M)}$$

$$\frac{\partial^2_{Bw(K^*)}}{\partial M_O^2} = f(M) \left\{ \frac{1}{W(M)} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial M_O^2} \right) - \frac{2}{W^2(M)} \left(\frac{\partial K}{\partial M_O} \frac{\partial W(M)}{\partial M_O} \right) - \frac{K}{W^2(M)} \left(\frac{\partial^2 W(M)}{\partial M_O^2} \right) + 2 \frac{K}{W^3(M)} \left(\frac{\partial W(M)}{\partial M_O} \right)^2 \right\}$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial^2 W(M)}{\partial M_O^2} = + 2$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial M_O^2} = \frac{\partial}{\partial M_O} \left(\frac{\partial K}{\partial M_O} \right) = \frac{2}{K} \left(\frac{\partial K}{\partial M_O} \right)^2 - \frac{K^2}{T'} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial M_O^2} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial M_O^2} = \int_a^b \left(-\frac{2}{W^2(M)} + \frac{8(M-M_O)^2}{W^3(M)} \right) f(M) \, dM$$

et d'après ce qui précède :

$$\frac{\partial^2_{Bw(K^*)}}{\partial M_O^2} = f(M) \left[\frac{2}{KW(M)} \left(\frac{\partial K}{\partial M_O} \right)^2 - \frac{K^2}{T' W(M)} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial M_O^2} \right) + \frac{4(M-M_O)}{W^2(M)} \left(\frac{\partial K}{\partial M_O} \right) + \frac{2K}{W^3(M)} \left(3(M-M_O)^2 - \frac{\Gamma^2}{4} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2_{\Gamma} B_W(K)^*}{\partial \Gamma^2} = f(M) \left[\frac{1}{W(M)} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \Gamma^2} \right) - \frac{2}{W^2(M)} \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} \frac{\partial W(M)}{\partial \Gamma} \right) - \frac{K}{W^2(M)} \left(\frac{\partial^2 W(M)}{\partial \Gamma^2} \right) + 2 \frac{K}{W^3(M)} \left(\frac{\partial W(M)}{\partial \Gamma} \right)^2 \right]$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial^2 W(M)}{\partial \Gamma^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \Gamma^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} \right) = \frac{2}{K} \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} \right)^2 - \frac{K^2}{T'} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \Gamma^2} \right) \text{ avec } \frac{\partial^2 I}{\partial \Gamma^2} = \int_a^b \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma^2}{W^3(M)} - \frac{1}{W^2(M)} \right) f(M) dM$$

et d'après ce qui précède :

$$\frac{\partial^2_{\Gamma} B_W(K)^*}{\partial \Gamma^2} = f(M) \left[\frac{2}{KW(M)} \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} \right)^2 - \frac{K^2}{T' W(M)} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \Gamma^2} \right) - \frac{\Gamma}{W^2(M)} \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} \right) - \frac{K}{2W^2(M)} + \frac{K\Gamma^2}{2W^3(M)} \right]$$

$$\frac{\partial^2_{Bw}(K^*)}{\partial M_O \partial \Gamma} = f(M) \left[\frac{1}{W(M)} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial M_O \partial \Gamma} \right) - \frac{1}{W^2(M)} \left(\frac{\partial K}{\partial M_O} \frac{\partial W(M)}{\partial \Gamma} \right) + \frac{\partial K}{\partial \Gamma} \frac{\partial W(M)}{\partial M_O} \right] - \frac{K}{W^2(M)} \frac{\partial^2 W(M)}{\partial M_O \partial \Gamma} + \frac{2K}{W^3(M)} \left(\frac{\partial W(M)}{\partial M_O} \frac{\partial W(M)}{\partial \Gamma} \right) \right]$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial^2_{W(M)}}{\partial M_O \partial \Gamma} = 0$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial M_O \partial \Gamma} = \frac{2}{K} \left(\frac{\partial K}{\partial M_O} \frac{\partial K}{\partial \Gamma} \right) - \frac{K^2}{T'} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial M_O \partial \Gamma} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial M_O \partial \Gamma} = \int_a^b - \frac{2\Gamma(M-M_O)}{W^3(M)} f(M) dM$$

et d'après ce qui précède :

$$\frac{\partial^2_{Bw}(K^*)}{\partial M_O \partial \Gamma} = f(M) \left[\frac{2}{KW(M)} \left(\frac{\partial K}{\partial M_O} \frac{\partial K}{\partial \Gamma} \right) - \frac{K^2}{T' W(M)} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial M_O \partial \Gamma} \right) - \frac{1}{W^2(M)} \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\partial K}{\partial M_O} - 2(M-M_O) \frac{\partial K}{\partial \Gamma} \right) - \frac{2K\Gamma(M-M_O)}{W^3(M)} \right]$$

APPENDICE B - I

Sections efficaces de K^+ (mb)

Valeurs expérimentales au 6 Nov. 1968

canal Expérience	$K^+ \pi^- p \pi^+$	$K^0 \pi^0 p \pi^+$	$K^0 \pi^+ n \pi^+$	$K^0 p \pi^+$
3.0 (CERN)	2.3 ± 0.3 (b)	2.1 ± 0.3 (b)	0.6 ± 0.2 (b)	2.1 ± 0.3 (a)
3.0 (BNL)				
3.2 (Ill.)				
3.5 (CERN)	2.1 ± 0.2 (b)	2.45 ± 0.3 (b)	0.55 ± 0.1 (b)	1.9 ± 0.1 (a)
3.54 (Wisc.)				
4.27 (Chicago)				
4.6 (LRL)	$1.8 \pm ?$ (c)	$1.65 \pm ?$ (c)		
5.0 (CERN)	1.8 ± 0.15 (a)	1.5 ± 0.2 (a)	0.4 ± 0.05 (a)	0.8 ± 0.1 (a)
5.5 (Hopkins)	1.83 ± 0.2 (d)	1.44 ± 0.15 (d)	$0.34 \pm ?$ (d)	$0.8 \pm ?$ (d)
7.3 (UCLA)	1.75 ± 0.15 (e)	1.37 ± 0.15 (e)		
8.25 (CERN)				0.4 ± 0.1 (a)
9.0 (LRL)	$1.16 \pm ?$ (c)	$0.66 \pm ?$ (c)		
10.0 (British)		0.60 ± 0.04 (g)		0.16 ± 0.2 (g)
12.6 (Rochester)	1.13 ± 0.1 (f)	0.71 ± 0.09 (f)		0.19 ± 0.03 (f)

(a) Collaboration CERN-Bruxelles; papier présenté à Vienne

(b) Publié dans Nuovo Cimento

(c) Communication privée de B. Shen à C. Chien (Juin 1967)

(d) Communication privée de G. Luste et D. Gillespie à la réunion sur la collaboration de K^+ (Septembre 1967)

(e) Physics Letters 28B (1968) 203

(f) Diverses publications de l'Université de Rochester

(g) Communication privée de M. Bowler et K. Barnham à la réunion sur la collaboration de K^+ (Septembre 1967)

APPENDICE B - II

Au cours de l'impression de cette thèse, j'ai eu connaissance de la référence (D-12). Il s'agit d'un papier présenté à la conférence de Boulder (Colorado) en août 1969 et qui donne une nouvelle valeur de σ_T à 5.5 GeV/c s'accordant bien mieux avec les résultats attendus. En effet, dans cette publication, le nombre de millibarns par événement est de 0.000166, ce qui correspond à une section efficace

$$\sigma_T = 1.575 \text{ mb}$$

valeur tout à fait compatible avec celle que je prévoyais à cette énergie.

Cette nouvelle détermination ne change rien aux paramètres M_0 et Γ du K_{890}^* déterminés au chapitre C-IX, il suffit de multiplier tous les ajustements de sections efficaces à cette énergie par le facteur 0.86. En particulier $\sigma_{\max}(K\pi)$ donnée par "Extrapo-Exp" passe alors de

$$(117.3 \pm 12.5) \text{ mb}$$

$$\text{à } (100.9 \pm 10.8) \text{ mb}$$

ceci en conservant la même incertitude relative de 10 % sur σ_T . Cette valeur est bien sûr plus compatible avec la limite d'unitarité; plus précisément le paramètre λ défini dans le tableau (C-22) vaut maintenant :

$$\lambda = (23 \pm 14) \% .$$

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

- (O - 1) G.F. Chew and F.E. Low
Phys. Rev. 113 (1959) 1640
- (O - 2) J.P. Baton
Thèse de doctorat - Rapport CEA - R - 3543
- (O - 3) J.P. Baton, G. Laurens, J. Reignier
Phys. Letters B25 (1967) 419
- (O - 4) J.P. Baton, G. Laurens, J. Reignier
Nuclear Physics B3 (1967) 349
- (O - 5) S. Marateck, V. Hagopian, W. Selove, L. Jacobs,
F. Oppenheimer, W. Schultz, L.J. Gutay, D.H. Miller,
J. Prentice, E. West and W.D. Walker
Study of $\pi\pi$ elastic scattering using the Chew-Low
extrapolation method.
Phys. Rev. Letters 21 (1968) 1613
- (O - 6) L.J. Gutay, D.D. Carmony, P.L. Csonka, F.J. Loeffler
and F.T. Meiere
Recent experimental results on $\pi\pi$ interactions.
Purdue University report no. C00 - 1428 - 65

CHAPITRE A

- (A - 1) J. Naisse
Rapport interne LIBHE no. 108 (1968) - Bruxelles

- (A - 2) Szegö
Orthogonal polynomials; et plus particulièrement page 243
- (A - 3) W. De Baere, J. Debaisieux, P. Dufour, F. Grard,
J. Heughebaert, L. Pape, P. Peeters, F. Verbeure,
R. Windmolders, G. Bassompierre, Y. Goldschmidt-Clermont,
A. Grant, V.P. Henri, B. Jongejans, D. Linglin, W. Matt,
F. Muller, J.M. Perreau, H. Piotrowska, I. Saitov,
R. Sekulin and G. Wolf
Double resonance production by 5 GeV/c K^+ mesons on protons.
Nuovo Cimento A61 (1969) 397
- (A - 4) G. Bassompierre, D. Drijard, Y. Goldschmidt-Clermont,
A. Grant, V.P. Henri, B. Jongejans, D. Linglin, F. Muller,
J.M. Perreau, L. Riddiford, I. Saitov, R. Sekulin, G. Wolf,
W. De Baere, J. Debaisieux, P. Dufour, F. Grard,
J. Heughebaert, L. Pape, P. Peeters, F. Verbeure and
R. Windmolders
Spin, branching ratios and production characteristics of
the K_{1420}^* . CERN TC Report no. 69-16.
Submitted to Nuclear Physics B

CHAPITRE B

- (B - 1) H.P. Dürr and H. Pilkuhn
Kinematical form factors in the peripheral model.
Nuovo Cimento 40 (1965) 899
- (B - 2) P.E. Schlein
 $K\pi$ scattering and normal parity K^*S .
UCLA 1029 (1968) and W.A. Benjamin Inc.:
"Meson Spectroscopy" p. 161 - C. Baltay and A.H. Rosenfeld ed.

- (B - 3) H. Piotrowska, F. Wagner and G. Wolf
Application of unitarized Vénéziano model to $K\pi$ scattering.
Presented at the Lund Conference
- (B - 4) W. De Baere, J. Debaisieux, E. De Wolf, P. Dufour, F. Grand,
P. Herquet, J. Heughebaert, J. Naisse, L. Pape, P. Peeters,
F. Verbeure, R. Windmolders, G. Bassompierre, G. Charriere,
D. Drijard, Y. Goldschmidt-Clermont, A. Grant, V.P. Henri,
B. Jongejans, D. Linglin, F. Muller, J.M. Perreau,
H. Piotrowska, J.K. Tuominiemi, G. Wolf
Study of the $K\pi$ elastic scattering in $K^+p \rightarrow K\pi N^*$ at 5 GeV/c
incident K^+ momentum.
Bulletin of the American Physical Society 14 (1969) 614 .
To be published in Nuclear Physics and presented at the
Washington and Lund Conferences
- (B - 5) M.N. Focacci and G. Giacomelli
Pion-proton elastic scattering
CERN Yellow Report no. 66-18

CHAPITRE C

- (C - 1) P. Bareyre, C. Bricman, G. Villet
Rapport CEA no. R - 3401
mêmes auteurs : Phys. Rev. 165 (1968) 1730
- (C - 2) E. Colton
Tabulation of quantities from CERN πN phase shifts.
UCLA notes, Memo no. 48 (1968)
- (C - 3) C. Fourgaud et A. Fuchs
Statistique - Dunod Editeur (1967), p. 289 à 297, et plus
particulièrement, p. 293 remarque 2

- (C-4) M. Froissart - Communication privée
- (C-5) Jackson
Review of modern physics 37 (1965) 484
- (C-6) S. Weinberg
Pion scattering lengths.
Phys. Rev. Letters 17 (1966) 616
- (C-7) J.A. Cronin
Phenomenological model of strong and weak interactions
in Chiral $U(3) \otimes U(3)$
Phys. Rev. 161 (1967) 1483
- (C-8) H. Yakubi
Zeros in the scattering amplitudes of two pseudoscalar
mesons in the nonet states.
Phys. Rev. 170 (1968) 1410
- (C-9) K. Kwarabayashi, S. Kitakado and H. Yakubi
Veneziano's model and nonet scheme for 1^- and 2^+ mesons.
Physics Letters 28B (1969) 432
- (C-10) D. Kiang, P.Y. Kwork and K. Nakazawa
 πK scattering length and the background term in the
Veneziano model.
Lettere al Nuovo Cimento 2 (1969) 84

CHAPITRE D

- (D - 1) T.G. Trippe, Chih-Yung Chien, E. Malamud, J. Mellema,
P.E. Schlein, W.E. Slater, D.H. Stork and H.K. Ticho
 $K^+p \rightarrow K\pi\Delta^{++}$: O.P.E., pole extrapolation and $K\pi$ interaction.
UCLA 1024 - Presented at the Vienna Conference
- (D - 2) G. Wolf
Shrinkage effects and one-pion exchange.
Physics Rev. Letters 19 (1967) 925
- (D - 3) E. Ferrari and F. Selleri
Peripheral model for inelastic processes
Suppl. al Nuovo Cimento 24 (1962) 453
- (D - 4) F. Selleri
Off-shell pion-pion scattering in the $T = J = 1$ state.
Phys. Letters 3 (1962) 76
- (D - 5) E. Ferrari and F. Selleri
An approach to the theory of single pion production in
nucleon-nucleon collisions.
Nuovo Cimento 27 (1963) 1450, et plus particulièrement p.1477
- (D - 6) E. Urvater, J.B. Kopelman, L. Marshall Libby, W.B. Campbell,
R.E. Juhalla and J.I. Rhode
Reaction $K^-p \rightarrow K^-p\pi^-\pi^+$ at 4.6 and 5.0 GeV/c; evaluation
of $K^-\pi^-$ scattering cross section.
Physics Rev. Letters 18 (1967) 1156

- (D - 7) C. Lovelace
CERN preprint TH 1041
Invited paper at the Argonne Conference on $\pi\pi$ and $K\pi$
interactions (may 1969)
- (D - 8) F. Wagner
Analysis of peripheral pion production with a
unitarized $\pi\pi$ Vénéziano formula.
CERN preprint TH 1012 and also Nuovo Cimento 54 (1969) 189
- (D - 9) G. Bassompierre, Y. Goldschmidt-Clermont, A. Grant,
V.P. Henri, B. Jongejans, U. Kundt, F. Muller, J.M. Perreau,
H. Piotrowska, R.L. Sekulin, J.K. Tuominiemi,
J.M. Crispeels, J. Debaisieux, J. De Jongh, M. Delabaye,
P. Dufour, F. Grand, J. Heughebaert, J. Naisse, S. Tavernier,
G. Thill, K. Buchner, G. Dehm, G. Goebel, H. Hupe,
T. Joldersma, I.S. Mittra, W. Wittek, G. Wolf
Production of K_{892}^* in K^+N interactions at 3 GeV/c.
CERN TC Report no. 69-29 and to be submitted to Nuclear
Physics B
- (D-10) C. Lovelace
Phys. Letters 28B (1968) 264
J. Shapiro and J. Yellin
UCRL 18500 (1968)
- (D-11) T.G. Trippe, C.-Y. Chien, E. Malamud, J. Mellema,
P.E. Schlein, W.E. Slater, D.H. Stork and H.K. Ticho
Evidence for a broad scalar $K\pi$ resonance near 1.1 GeV/c.
Phys. Letters 28B (1968) 203

- (D-12) P. Antich, A. Callaghan, R. Carson, B. Cox, D. Denegri,
L. Ettlinger, D. Feiock, G. Goodman, R. Mercer,
R. Sekulin, A. Pevsner, R. Zdanis
 $K\pi$ scattering in the reaction $K^+p \rightarrow K^+\pi^-\Delta^{++}$.
Paper presented at the Boulder Conference
(Cette publication est une version plus détaillée d'un
papier présenté par les mêmes auteurs à la Conférence
d'Argonne en mai 1969)
- (D-13) P.E. Schlein
Experimental studies of the $K\pi$ interaction.
UCLA 1040 - Invited paper at the Argonne Conference
- (D-14) J. Goldberg, E. Huffer, M. Laloum, G. Lamidey, A. Rougé,
B. Haber, G. Yekutieli, A. Rossi, P. Serra, G. Bakker,
W. Hoogland, R. Barloutaud and J.C. Scheuer
Decay asymmetry of the $K^-\pi^+$ system in K^- nucleon
interactions at 3 GeV/c.
Phys. Letters 30B (1969) 434
- (D-15) G. Goldhaber
Review talk at the Berkeley Conference (1966)
proceedings p. 139
- (D-16) B. French
Review talk at the Vienna Conference (1968)
proceedings p.100
E. Malamud and P.E. Schlein
Phys. Rev. Letters 19 (1967) 1056

- (D-17) D.J. Crennel, U. Karshon, Kwan Wu Lai, J.S. O'Neill
and J. M. Scarr
Evidence for an isospin $1/2$ $K\pi$ enhancement at a mass
of 1160 MeV produced in K^-n interactions at 3.9 GeV/c.
Phys. Rev. Letters 22 (1969) 487
- (D-18) B. French
Proceedings of the Vienna Conference p. 139

Liste des Figures

CHAPITRE A

(A - 1)	Le processus périphérique $K^+p \rightarrow (K^+\pi^-) (p\pi^+)$	7
(A - 2)	Les 4 systèmes de référence	9
(A - 3)	Le plan complexe Δ^2 et le cercle de convergence	16
(A - 4)	Le plan complexe Δ^2 et l'ellipse de convergence	16

CHAPITRE B

(B - 1)	Le volume ($M_{K\pi}^2$, $M_{p\pi}^2$, Δ^2) dans le cas d'ajustements par intervalles	25
(B - 2)	4 exemples d'ajustements par méthode de χ^2	27
(B - 3)	Le volume ($M_{K\pi}^2$, $M_{p\pi}^2$, Δ^2) dans le cas d'un ajustement global	34

CHAPITRE C

(C - 1)	Distribution de la masse effective ($p\pi^+$)	52
(C - 2)	Distribution de la masse effective ($K^+\pi^-$)	52
(C - 3)	Diagramme de Chew et Low $M(K^+\pi^-)$, Δ^2	54
(C - 4)	Distribution de la masse effective ($K^+\pi^-$) si $1.14 < M(p\pi^+) < 1.36$ et $ \Delta^2 < 20\mu^2$	55

$p_{K^+} = 5.0 \text{ GeV/c}$

- (C - 5) Quelques valeurs expérimentales de la section efficace $K^+p \rightarrow K^+p\pi^+\pi^-$ en fonction du moment du K^+ incident.
La courbe est tracée à la main, elle ne correspond à aucun ajustement ni théorie. 56
- (C - 6) Les trois formes utilisées pour la section efficace $p\pi^+ \rightarrow p\pi^+$ en fonction de la masse effective ($p\pi^+$) 60
- (C - 7) Distribution des ajustements du paramètre A_1 avec les incertitudes dA_1 , en fonction de la masse effective ($K^+\pi^-$) - (exemple) 66
- (C - 8) Visualisation de la faible grandeur relative de l'incertitude dA_1 - (exemple) 68
- (C - 9) Exemple d'ajustement global par "Extrapo-Exp" 72
- (C-10) Comparaison entre 4 méthodes d'ajustement par intervalles - 3 exemples 74
- (C-11) Résultat final à 5.0 GeV/c - Superposition des résultats d' "Extrapo-Exp" , "Extrapo-Int" et "Fit 2 bod" .
Indication des valeurs de la limite d'unitarité pour une onde S et une onde P 1/2 en fonction de $M_{K^+\pi^-}$ 89
- (C-12) Photo de la sortie de programme donnant le résultat final d' "Extrapo-Exp" à 5.5 GeV/c 90
- (C-13) Exemple de résultats d' "Extrapo-TH" en laissant libre la section efficace σ_T .
Superposition des courbes obtenues à 5.0 et 5.5 GeV/c 103

CHAPITRE D

- (D - 1) Distribution de la section élastique $\pi^- \pi^0$ et
de la pente des divers ajustements correspondants.
D'après J.P. Batou 121
- (D - 2) Distributions de $\sigma_{K^+ \pi^-}$ à 5.0 GeV/c d'après
"Extrapol-Int" et des ajustements du 1er au
4ème degré en $(\Delta^2 - \mu^2)$ 125
- (D - 3) Le déphasage δ_0^1 du système $K^+ \pi^-$ à 5.5 GeV/c.
D'après Antich et al (Réf. D-12) 127

Table des Matières

<u>INTRODUCTION :</u>		1
<u>CHAPITRE A :</u>	Exposé théorique	
I	Aperçu de la théorie	7
II	Notations	8
III	Expression générale de la section efficace 4-corps	11
IV	Expression des sections efficaces de diffusion ($K^+\pi^-$) et ($p\pi^+$)	13
V	Théorie de Chew et Low	15
VI	Formule d'extrapolation	18
VII	Restrictions pratiques sur les événements réels	21
<u>CHAPITRE B :</u>	Les méthodes statistiques d'analyse	
I	Introduction	23
II	Méthode du χ^2	24
III	Méthode du maximum de vraisemblance calcul des normalisations	31
IV	Ajustements par intervalles : "Extrapo-Int" programme "Fit 2 bod"	38
V	Ajustement global : "Extrapo-Exp"	43
<u>CHAPITRE C :</u>	Les résultats	
I	Description des lots d'événements	51
II	La section efficace $\sigma_{p\pi^+}$	57
III	Influence des faibles $ \Delta^2 $	61
IV	Influence de la forme donnée à $\sigma_{p\pi^+}$	63

V	Etude des A_i , coefficients ultérieurs du développement	65
VI	Influence de la limite en Δ^2	70
VII	Influence du degré du développement en $(\Delta^2 - \mu^2)$	75
VIII	$\phi(\Delta^2)$ ou $\phi(\mu^2)$	82
IX	Résultats finals	88
X	Section efficace 4-corps et la limite d'unitarité	96
XI	La section efficace $(K^+ \pi^-)$ au seuil	106

CHAPITRE D : Etude comparative des diverses méthodes actuelles
d'extrapolation

I	Méthodes théoriques	112
II	Résultats expérimentaux	119

CONCLUSION 131

REMERCIEMENTS 133

APPENDICE A Calcul des dérivées L' et L'' de la fonction
de vraisemblance 135

APPENDICE B-I Tableau de sections efficaces 142

B-II Note sur la section efficace 4-corps à 5.5 GeV/c 143

BIBLIOGRAPHIE 145

LISTE DES FIGURES 153

